DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM LIBRI TRES.

LVCÆ VALERII

Mathematicæ, & Ciuilis Philoſophiæ in Gymnaſio Romano profeſſoris.



Conuent' S. Mariæ de Scala

ROMÆ, Typis Bartholomæi Bonfadini. M D C IIII.

SVPERIORVM PERMISSV.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

2E2 1. 9 16

Imprimatur
Si placet R. P. Magiſtro S. Palatij
B. Gypſius Viceſger.

Imprimatur

Fr. Io. Maria Braſichellen. Sacri Pal. Apoſtol. Magiſt.

SANCTISSIMO
DOMINO NOSTRO
CLEMENTI VIII
PONT. OPT. MAX.

Lucas Valerius perpetuam felicitatem.

GRATA Principi munera, P. B. ex Philoſophiæ latebris deprompta, quaſi aurum ſoli expoſitum illico ſplendent, & publicæ vtilitatis ſpem oſtendunt, magno ornata præſidio in primos liuoris impetus illius approbatione, cuius officium eſt alia à rep. auertere, alia imperare. Hinc porrò factum eſt, vt omnis ferè ſcriptor exiſtimationis periculum aditurus, aliquem ex principibus

BIBLIOTECA NAZ. ROMA. VITTORIO EMANUELE

viris ſibi deligat, cuius autoritate ipſi dicatum opus ab inuidorum morſibus ſeruetur incolume. Hanc ergo conſuetudinem amanti mihi ſanè feliciter cecidit, vt tu ſola tua propria benignitate permotus in tuos me familiares vltro aſcriberes. Siue enim ingenij mei debilis partus magnã patroni deſiderat autoritatem: tu principum orbis terrarum princeps ſemper digniſſimam principatu ſapientiam præſtitiſti. Seu tàm elatæ dedicationes ſolent alienas à ſapientiæ ſtudio ſpes olere: lux tanti patrocinij, tuorumq; veterum in me beneficiorum, atram ſuſpicionem amouebit. Quòd verò ad vitam ipſius operis attinet, quam nulla per te velim temporum permutatione terminari: vereor vt id ſua luce multis alijs vitali aſpiciat illa, quæ tua ſtudia, & res geſtas omnium linguis, & litteris celebrabit æternitas. quantum enim tuam excelſam ſuſpicio dignitatem, tantum deſpicor iſtius doni incredibilem cum illa comparati humilitatem: neque id niſi diuinitus crediderim perpetuam in tuis laudibus famam habiturum. Quare illud non ſolum tibi diuini gregis antiſtiti cupio gratum accidere, cuius autoritate protectum in tanta nouarum rerum poſt tam graues autores contemptione, minimo meo cum rubore in medium prodeat: ſed ipſi diuinitati ex voluntate donum expendenti, penes quam eſt æternitas, & cui primum dicata omnia eſſe oportet: vt hi, quos tuis luminibus dignaris, de

centro

centro grauitatis ſolidorum ſterilis ingenij mei teſtes libelli à mortis æmulæ me obliuione defendant. Stomacharis hic, arbitror, quòd tantum ſpectem de nihilo; ſed magis confeſſionis impudentia. At verò non impetus animi ad gloriam, cuius nullum mihi natura ſemen impartiuit (ſit gloriæ loco ignauiæ fugiſſe dedecus) ſed tua erga me voluntas, meis apta ſtudijs liberalitate teſtata hunc ardorem expreſſit. Tanta enim eſt venuſtas tuæ virtutis ex mei meriti penuria, vt putem ſine me indice illam diminutum ſui ſpectaculum poſteris præbituram. Nihil ergo minus cogitans quàm quî tua beneficia cumulando perturbatis iudicijs ſatisfacerem, ſcientia ſcilicet, & virtute illa, qua maximè ſuperbit eneruata, & areſcens Mundi ætas; nullum opulentiæ meæ, artis alienæ ſpecimen pro munere gratiæ à te accepto partem tibi reddidi: ſed ingenij mei partum, qualis is cumque eſt; quod & grati animi quæſitum monumentum crimine me audaciæ liberet, ſi quod impendeat, palam dedicaui. Alij tibi columnas honeſtiſſimis titulis ornatas erigant: ſtatuas in foris collocent: magnificas ædes extruant, quarum in frontibus grandes marmoreæ tabulæ flammantibus auro ſyderibus, & peregrinis lapidibus intextæ ea de te viuo referant ſaxum impudens, quæ verecunda hæc pagina prætermittit. Ego incredibilis tuæ benignitatis non tam grauia teſtimonia, quæ loco moueri nequeant: ſed

expe-

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

expeditum hunc nuntium in longiſſima itinera
deſtinaui. Quem quidem eo minus vereor ne
non tu,quamobrem Telchines fortaſſe aliqui in-
ſectaturi , diſpari ſis voluntate protecturus, quòd
in his tàm reconditis naturæ arcanis geometrica
demonſtratione patefactis, tanquam in ſemine
multiplicem præſcriptionem, ac normam eſſe in-
telliges ipſe pacis inter tuos greges autor, lupi
otomani terror, ciuili, & bellicæ architecturæ
maximè neceſſariam. Quòdque,cum ad theologi-
cam quandam veritatem chriſtiano generi maxi-
me ſalutarem illuſtrandam,per Philoſophię etiam
campos ſapientium hominum corona decoratus,
nulla tantæ molis, quantam ſuſtines negotiorum
iactura latiſſimè vageris; nempe illam creſcere,
atque illuſtrari indies magis ex optas, cuius con-
ſuetudine tantopere delectaris. Quod denique
ſcientiæ ciuilis ipſe peritiſſimus omnium optimè
intelligis,quanti referat ad humanæ ſocietatis for
mam & candorem, regum, atque optimatum a-
mor in ſtudioſos bonarum litterarum. contrà au-
tem ex deſpectione in hos cadente ab ijs, quorum
mores pro legibus haberi ſolent, noſti commu-
nem ingeniorum veternum, mox tyrannidem gi-
gni, magna cuſtode adempta modeſtiæ imperi-
tantium crebra ciuium ſapientia, quæ prauis ti-
morem efficit,melioribus pudorem, Quod ſi meæ
expectationi exitus reſpondebit, vt te hoc munu-
ſculo vel leuiter lætari ſentiam; alia non iniucun-
da

da ſtatim proferam, qua PETRVS ALDOBRANDINVS tuus nepos, domi foriſque clariſſimus Cardinalis, cuius inter familiares itidem, beneficijsque deuinctos locum habeo, ſuæ erga me humanitatis teſtimonia ab inuidiæ ſatellite & miniſtra calumnia tueatur: quando duobus talibus viris animi mei captum beneficentia ſua periclitantibus, duplex periculum ſubire ſum coactus. Sed iam verboſæ epiſtolæ, & tuo faſtidio finem impoſiturus peto à te vnum; vt tibi perſuadeas, me inter tuos famulos, quos ære proprio, & victu quotidiano liberaliter ſuſtentas, eorum, qui pro te emori poſſunt, amore, conſtantia, fidelitate nemini planè concedere. Sic tua omnia præſtantiſſima facinora Princeps magnanime, & pietatis columen, Deus Opt. Max. tibi fortunet, quem ad maiores in dies res gerendas in longum æuum incolumen, felicemque conſeruet. Valet.

ΛΟΥΚΑ ΟΥΑΛΕΡΙΟΥ

ΕΙΣ ΤΑ ΑΥΤΟΥ ΚΕΝΤΡΑ

στερεῶν βαρέων, ἐπίγραμμα.

Παίγνια φιλοσόφοις Λουκᾶς τὰ δὲ σύμπλοκα δάφνῃ,
Στρυμόνος ἐγκελάδου κρήαστονα παυσιλύπων,
Δῶρον ἔπεμψα· πέρας δ᾽ ἔργων τοῖς τοῦτ᾽ ἄδασα
Βριθοσύνης βαρέων πῆξε θέμεθλα φύσις.
Τοῖς πέραν αὐαλέων Ἰνδῶν προΐαψα μερίμνας.
Μέμψει μὴ πίων τήρεα, μὴ δὲ τύχην.
Τοῖς τινος ὀφρυόεν πολυπράγμονος ὄμμα γελάσσας.
Βέλτιον ἀργυρέης κέρδος ἔδειξα στροφ.
Εἰ δέ τι τῶν τις ὅπως ἕξει χαριέστερον εὕροι.
Πρὶν θανάτοις μάρψῃ μ᾽· εὔχομ᾽ ἐπιστελέτω.
Ἀνέρος οὐ κλέψω χάριν εὔφρονος ἐσσομένοισι
Δεῖγμ᾽ ἀγλαὸν, γενεὴν, οὔνομα, καὶ πατρίδα.
Ὃς δέ με λαθραῖος δήξει, κακόεργος ἀκούσει.
Αὐτῶν ἧς φθονερῆς ἄξια πυρκαϊῆς.

LVCAE VALERII DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM

LIBER PRIMVS.

PRopoſitum eſt mihi in hiſce tribus libris, ò Geometra, cuiuſcumque figuræ ſolidæ in geometria ratio haberi ſolet, centrum grauitatis inuenire. Huius autem prouinciæ mihi ſuſcipiendæ occaſio fuit liber ille iam pridem editus Federici Commandini Vrbinatis, in quo cum ille corporum planis terminis definitorum; necnon cylindri, & coni, & fruſti conici, & ſphæræ, & ſphæroidis centrum grauitatis oſtendiſſet; aliorum autem, quæ ſuperficie mixta continentur vno conoide parabolico tentato ſyllogiſmi iactura operam perdidiſſet, ego ſpe magis, ad quam vir ille exarſerat incita-

tus, quàm deterritus lapſu, vehementerque dolens geometriæ partem tamdiu deſiderari cognitione digniſſimam; cum ante exercitationis cauſa omnium, quæ propoſui ſolidorum, excepto conoide parabolico, centra grauitatis aliis viis indagaſſem; poſtea non ſolum parabolici, ſed ante me tentata nemini, hyperbolici conoidis, & fruſti vtriuſque, & portionis vtriuſque conoidis, & portionis fruſti, & hemiſphærij, & hemiſphæroidis, & cuiuſlibet portionis ſphæræ, & ſphæroidis vno, & duobus planis parallelis abſciſſæ cētra grauitatis adinueni, multa autem ex his duplici, quædam triplici via. Taceo nunc alia eiuſdem generis, quæ cum vtilia, tum geometriæ ſtudioſis non iniucunda, vt arbitror, futura in poſteriores libros diſtribuimus. Quòd autem aliquot propoſitiones, alias Archimedis lemmaticas, alias Commandini meis rationibus attuli demonſtratas; non tàm idcirco id feci, ne meæ lucubrationes deperirēt, quàm quòd vel ſtylo Euclidis magis conſonæ, vel ad percipiendum eo minus laborioſæ, quo ad inueniendum ſunt difficiliores, vel meo propoſito aptiores viderentur. Earum propoſitionum, Archimedis duo ſunt in primo libro, decimaquarta, & ſeptima, & ſecunda pars vigeſimæ; in ſecundo autem vna. Omne conoides parabolicum ſeſquialterum eſſe coni eandem baſim, & eandem altitudinem habentis. Commandini autem omnes in primo libro nouem; vigeſima tertia, & quinta: trigeſima ſecunda, tertia, quarta, ſeptima, & nona: quadrageſima prima, & ſecunda. Sed multa hic noua inuenies ita ad præſens inſtitutum neceſſaria, vt per ſe tamē ipſa in geometria locum habere debeant, maxime verò tres primæ ſecundi libri propoſitiones, quippe quibus magnam, ac perdifficilem geometriæ partem demonſtratione recta, & generali ad viam regiam redactam eſse intelliges. Ita Deus Opt. Max. cuius auxilio hæc feci, quibus prodeſse alicui vehementer cupio, reliquis meis conatibus opem ferat. Sed ad definitiones accedamus.

DEFI-

DEFINITIONES.

I.

Figuræ aliquæ planæ multilateræ centrum habere dicuntur punctum illud, in quo omnes rectæ lineæ vel angulos oppoſitos iungentes bifariam ſecantur, vel ab angulis ductæ ad laterum oppoſitorum bipartitas ſectiones in eaſdem rationes.

I I.

Circa diametrum eſt figura plana, in qua recta quædam, quæ diameter figuræ dicitur, omnes rectas alicui parallelas, à figura terminatas bifariam diuidit.

I I I.

Octaedrum communiter dictum, eſt figura ſolida octo triangulis binis parallelis, æqualibus, & ſimilibus comprehenſa.

I I I I.

Polyedri regularis centrum dicitur punctum, in quo omnes rectæ lineæ, quæ ad angulos oppoſitos pertinent bifariam diuiduntur.

V.

Cuiuſlibet figuræ grauis centrum grauitatis eſt punctum illud, à quo ſuſpenſum graue per ſe manet partibus quomodocumque circa conſtitutis.

V I.

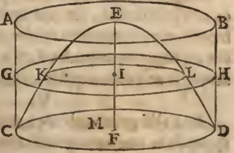
Axis priſmatis, & pyramidis & eius fruſti dicitur recta linea, quæ in pyramide à vertice ad baſis centrum figuræ vel grauitatis pertinet: in reliquis autem, quæ baſium oppoſitarum figuræ vel grauitatis centra iungit.

V I I.

Si qua figura ſolida planis parallelis ita ſecari poſſit, vt quæcumque ſectiones centrum habeant, & ſint inter ſe ſimiles; aliqua autem recta linea, ſiue ad centra baſium oppoſitarum prædictis ſectionibus parallelarum, & ſimilium, vt in cylindro; ſiue ad verticem, & centrum baſis terminata, vt in cono, hemiſphærio, & conoide, tranſeat per centra omnium prædictarum ſectionum; ea talis figuræ axis nominetur: ipſa autem figura, ſolidum circa axim. Quæ ſi vel vnam tantum habeat baſim, vel duas inæquales, & parallelas: duarum autem quarumlibet prædictarum ſectionum vertici, vel minori baſi propinquior ſit minor remotio-

motiori; ſolidum circa axem in alteram partem deficiens nominetur: quo nomine ſignificari etiam volumus ea ſolida, quorum quælibet ſectiones baſi parallelæ quamuis baſi non ſint omnino ſimiles, tamen ijs figuris deficiunt, quæ ſunt ſimiles baſi, ac totis ijs, à quibus ipſæ ablatæ intelliguntur, ita vt tota figura & ablata habeant commune centrum in vna recta linea ad centrum baſis terminata, quæ & ipſa talis ſolidi axis nominetur.

Vt in figura, ſolidi ABDC deficientis ſolido CED baſis eſt circulus AB, terminus baſi oppoſitus circumferentia circuli CMD. axis communis omnibus EF, per cuius quodlibet punctum I plano baſi AB parallelo ſecante ſolidum ABDC, & ablatum CED, & reſiduum, eſt totius ſectio circulus GH, ablati vero circulus KL, & reſidui ſectio reliquum circuli GH dempto circulo KL. quarum ſectionum omnium centrum commune eſt I.



Quod ſi ſuper duos circulos GH, KL circa axem communem EI cylindri deſcribantur, (erunt autem eiuſdem altitudinis) erit reliquum cylindri GB, dempto cylindro cuius baſis KL, axis EI, conſtitutum ſuper baſim G, K, & circa axim EI, quæ ſuo loco expectatur cogitatio.

POSTVLATA.

I.

Omnis figuræ grauis vnum eſſe centrum grauitatis.

II.

Omnium figurarum ſibi mutuo congruentium centra grauitatis mutuo ſibi congruere.

III.

Omnis figuræ, cuius termini omnis cauitas eſt interior, intra terminum eſſe centrum grauitatis.

IIII.

Similium triangulorum ſimiliter poſita eſſe centra grauitatis. In triangulis autem ſimilibus ſimiliter poſita puncta eſſe dicuntur, à quibus rectæ ad angulos æquales ductæ cum lateribus homologis angulos æquales faciunt.

V.

Æqualia grauia ab æqualibus longitudinibus ſecundum centrum grauitatis ſuſpenſa æquiponderare.

VI.

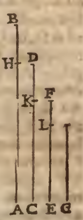
A quibus longitudinibus duo grauia æquiponderant, ab ijſdem alia duo quælibet illis æqualia æquiponderare.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

SI ſint quotcumque magnitudines inæquales deinceps proportionales; exceſſus,qui bus differunt deinceps proportionales erunt,in proportione totarum magnitudinum.

Sint quotcumque inæquales magnitudines deinceps proportionales AB, CD, EF, & G, differentes exceſſibus BH, DK, FL, minima autem ſit G. Dico BH, DK, FL, deinceps proportionales eſse in proportione, quæ eſt AB, ad CD, ſeu CD, ad EF. Quoniam enim eſt vt AB, ad CD, ita CD ad EF; hoc eſt vt AB, ad AH, ita CD, ad CK, permutando erit, vt AB, ad CD, ita AH, ad CK: vt igitur tota AB, ad totam CD, ita reliqua BH, ad reliquam DK. Similiter oſtenderemus eſse vt CD ad EF, ita DK ad FL; vt igitur BH ad DK, ita erit DK ad FL, in proportione, quæ eſt AB ad CD, & CD ad EF. Quod demonſtrandum erat.

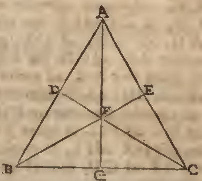


PRO-

PROPOSITIO II.

In omni triangulo vnum dumtaxat punctum eſt, in quo rectæ ab angulis ad latera incidentes ſecant ſeſe in eaſdem rationes. & ſegmenta, quæ ad angulos, ſunt reliquorum dupla. & prædictæ incidentes ſecant trianguli latera bifariam.

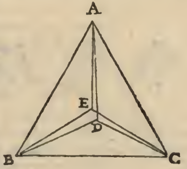
Sit triangulum A B C, cuius duo quælibet latera A B, A C, ſint bifariam ſecta in punctis D, E, & ductæ rectæ lineæ B E, C F D, A F G. Dico C F duplam eſſe ipſius F D, & A F, ipſius F G, & B F, ipſius F E. Et in nullo alio puncto à puncto F tres rectas ab angulis ad latera incidentes ſecare ſe ſe in eaſdem rationes. Et reliquum latus B C ſectum eſſe bifariam in puncto G. Quoniam enim eſt vt B A ad A D, ita C A ad A E: hoc eſt, vt triangulum A B C ad triangulum A D C, ita triangulum idem A B C ad triangulum A E B; æqualia erunt triangula A D C, A E B, & ablato trapezio D E communi reliquum triangulum B D F reliquo triangulo C E F æquale erit: ſed triangulum A D F eſt æquale triangulo B D F; & triangulum A F E triangulo E F C, propter æquales baſes, &



communes altitudines; totum igitur triangulum A F B toti A F C, triangulo æquale erit: ſed vt triangulum A F B ad

ad triangulum F B G, hoc eſt vt A F ad F G, ita eſt triangulum A F C ad triangulum F C G; triangulum ergo F B G triangulo F C G æquale erit, & baſis B G baſi G C æqualis. Quoniam igitur & A E eſt æqualis E C, ſimiliter vt ante, oſtenderemus, triangulum B C F, triangulo A C F, eademque ratione triangulum A B F, triangulo B C F æquale eſſe: igitur vnumquodque triangulorum A B F, A C F, B C F, tertia pars eſt trianguli A B C: ſed vt triangulum A B C, ad triangulum B C F, ita eſt A G, ad G F; tripla igitur eſt A G ipſius G F, ac proinde A F, ipſius F G dupla. Eadem ratione B E, ipſius F E, & C F, ipſius F D, dupla concludetur.

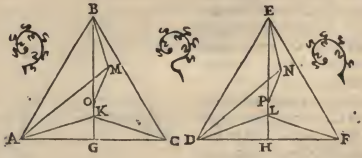
Sed ſint ſi fieri poteſt, trianguli A B C duo centra qualia diximus D, E: & ab ipſis ad ſingulos angulos ducantur binæ rectæ lineæ: & cadat D in aliquo triangulo B E C. Quoniam igitur D eſt centrum trianguli A B C erit triangulum B D C tertia pars trianguli A B C. Eadem ratione triangulum B E C tertia pars erit trianguli A B C; triangulum ergo D B C æquale erit triangulo B E C pars toti, quod fieri non poteſt, atqui idē abſurdum ſequitur, ſi punctum D cadat in aliquo latere triangulorum, quorum vertex E; Manifeſtum eſt igitur propoſitum.



PROPOSITIO III.

In ſimilibus triangulis rectæ lineæ, quæ inter centra, & alia in ijs ſimiliter poſita puncta interijciuntur, proportionales ſunt in proportione laterum homologorum.

Sint triangula ſimilia, & ſimiliter poſita A B C, D E F, quorum ſint centra O, P, in ijs autem triangulis ſint puncta ſimiliter poſita K, L, quæ cadant primum in rectis B G, E H, quæ ab angulis æqualibus B, E, baſes bifariam diuidunt. Dico eſſe O K ad P L, vt eſt latus A B, ad latus D E. iunctis enim A K, K C, D L, L F, quo-



niam angulus K A C, æqualis eſt angulo L D F, & angulus K C A, angulo L F D, ob ſimiliter poſita puncta K, L, triangulum A K C, triangulo L D F ſimile erit, & vt K A ad A C, ita L D ad D F: ſed vt C A ad A G, ita eſt F D ad D H, ex præcedenti; vt igitur K A, ad A G ita erit L D, ad D H, circa æquales angulos: ſimilia igitur ſunt triangula A G K, D H L, & angulus A G K, æqualis

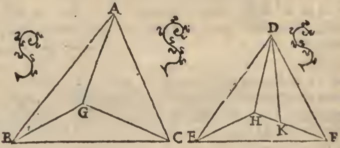
æqualis angulo D H L, & vt K G, ad G A, ita L H, ad H D: ſed vt G A, ad A C, ita eſt H D ad D F: & vt A C ad A B, ita D F ad D E, ex æquali igitur erit vt K G ad A B, ita L H ad D E: ſed vt A B ad B G, ita eſt D E ad E H, propter ſimilitudinem triangulorum A B G, D E H: & vt B G ad G O ita eſt E H ad H P, propter triangulorum centra O, P; ex æquali igitur erit vt K G ad G O, ita L H ad H P: & permutando vt O G ad P H, ideſt vt B G ad E H, ideſt vt A B ad E D, ita K G ad L H, & reliqua O K ad reliquam P L.

Sed ſint puncta ſimiliter poſita M, N, quæ cadant extra lineas B G, E H, iunctæque O M, P N. Dico itidem eſse vt A B ad E D, ita O M ad P N. Iungantur enim rectæ M B, N E, quæ cum quibus lateribus homologis angulos æquales faciunt, ea ſint A B, D E, quod propter iſoſcelia triangula ſit dictum in ſimiliter poſitis triangulis. igitur etiam angulus B A M, æqualis erit angulo E D N; ſimilia igitur triangula A B M, D E N: & vt M B ad B A, ita erit N E ad E D: ſed vt A B ad B G, ita eſt D E ad E H, propter ſimilitudinem triangulorum, & vt B G ad B O, ita eſt E H ad E P, ob triangulorum ſimilium centra O, P: ex æquali igitur erit vt M B, ad B O, ita N E ad E P. Rurſus quoniam angulus A B M, æqualis eſt angulo D E N, quorum angulus A B G, æqualis eſt angulo D E H: erit reliquus angulus O B M, æqualis reliquo angulo P E N: ſed vt M B ad B O, ita erat N E ad E P; triangulum igitur O B M triangulo P E N, ſimile erit, & vt B O ad E P, hoc eſt B G ad E H, hoc eſt A B ad D E, ita O M ad P N. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO IV.

Datis duobus triangulis ſcalenis ſimilibus, & dato puncto in altero eorum, vnum duntaxat punctum in reliquo triangulo prædicto puncto ſimiliter poſitum poteſt inueniri.

Sint data duo triangula ſcalena ſimilia A B C, D E F, & in triangulio A B C datum punctum G: ſint autem hæc triangula ſimiliter poſita. Dico in triangulo D E F, vnum duntaxat punctum puncto G ſimiliter poſitum inueniri poſſe. Iunctis enim A G, B G, G C, ponatur angulus E D H, æqualis angulo B A G, & angulus D E H,



æqualis angulo A B G, & H F iungatur. Manifeſtum eſt igitur ex præcedentis Theorematis demonſtratione, triangula E D H, H D F, F E H, ſimilia eſſe triangulis B A G, G A C, C B G, prout inter ſe reſpondent poſitione, quorum ſex triangulorum binis quibuſque binæ baſes homologæ reſpondent: A B E D, A C D F, B C E F.

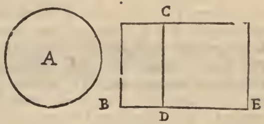
E F. quæ ſunt in latera homologa duorum triangulorum A B C, D E F. Ex definitione igitur, duo puncta G, H, in triangulis A B C, D E F, ſimiliter poſita erunt. At enim ſi fieri poteſt ſit aliud punctum K, in triangulo D E F, ſimiliter poſitum puncto G. Vel igitur punctum K in aliquo triangulorum, quorum eſt communis vertex H, vel in aliquo eorundem latere cadet. cadat in latere F H, & iungatur D K: triangulum ergo D F K, ſimile erit triangulo A C G. Sed & triangulum E D F, ſimile eſt triangulo B A C; vtraque igitur horum ad illorum ſibi reſpondens triangulorum duplicatam eorundem laterum homologorum A C, D F, habebunt proportionem: vt igitur eſt triangulum E D F, ad triangulum B A C, ita erit triangulum D F K, ad triangulum A C G: & permutando, vt triangulum A C G, ad triangulum A B C, ita triangulum D F K, ad triangulum E D F: eadem ratione, vt triangulum A C G, ad triangulum A B C, ita erit triangulum D F H, ad triangulum D E F: vt igitur triangulum D F K, ad triangulum E D F; ita erit triangulum D F H, ad triangulum E D F; triangulum ergo D F K, triangulo D F H, æquale erit, pars toti, quod eſt abſurdum: idem autem abſurdum ſequeretur, ſi punctum *K*, poneretur in aliquo prædictorum triangulorum, vt in triangulo D F H; Non igitur aliud punctum à puncto H, in triangulo E D F, ſimiliter poſitum erit puncto G. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO V.

Cuilibet figuræ planæ rectangulum æquale poteſt eſſe.

Sit

Sit quælibet figura plana A. Dico figuræ A, rectangulum æquale poſse exiſtere. Exponatur enim rectangulum B C, cuius latus B D, in infinitum producatur verſus E. Quoniam igitur eſt vt rectangulum B D, ad planam figuram A, ita recta B D, ad aliquam lineam rectam; ſit vt B C, ad A, ita B D, ad D E, & compleatur rectangulum E C. Quoniam igitur eſt vt B D ad D E, ita rectangulum B C, ad figuram A: ſed vt B D, ad D E, ita eſt rectangulum B C, ad rectangulum C E; vt igitur rectangulum B C, ad figuram A, ita eſt rectangulum B C, ad rectangulum C E; rectangulum ergo C E, figuræ A, æquale erit. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

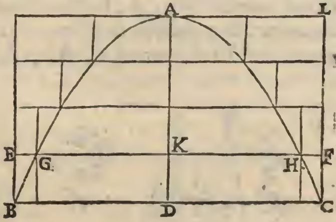


PROPOSITIO VI.

Omni figuræ circa diametrum in alteram partem deficienti figura quædam ex parallelogrammis æqualium altitudinum inſcribi poteſt, & altera circumſcribi, ita vt circumſcripta ſuperet inſcriptam minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita. Semper autem in ſimilibus intellige, eiuſdem generis.

Sit figura plana A B C circa diametrum A D, ad partes

tes A deficiens, cuius baſis B C. Dico fieri poſse quod proponitur: ducta enim per verticem figuræ A, baſi B C, parallela, atque ideo figuram ipſam contingente, abſoluatur parallelogrammum B L, ſectaque diametro A D, biſariam, & ſingulis eius partibus ſemper biſariam, ducantur per puncta ſectionum rectæ lineæ baſi B C, & inter ſe parallelæ, atque ita multiplicatæ ſint ſectiones, vt ſecti parallelogrammi in parallelogramma æqualia, & eiuſdem altitudinis quælibet pars, vt parallelogrammum B F, ſit minus ſuperficie propoſita, cuius parallelogrammi latus E F, ſecet figuræ terminum B A C, in punctis G H, & diametrum A D, in puncto K. erit igitur G K, æqualis K H: per omnia igitur puncta ſectionum termini B A C, quæ à prædictis fiunt lineis parallelis, ſi ducantur diametro A D parallelæ, figura quædam ipſi A B C, inſcribetur, & altera circumſcribetur ex parallelogrammis æqualium altitudinum. Dico harum figurarum inſcriptam ſuperari à circumſcripta minori ſpacio ſuperficie propoſita. Quoniam enim omnia parallelogramma, quibus figura circumſcripta ſuperat inſcriptam ſimul ſumpta ſunt æqualia B F parallelogrammo: ſed parallelogrammum B F, eſt minus ſuperficie propoſita: exceſſus igitur quo figura circumſcripta inſcriptam ſuperat, minor erit ſuperficie propoſita. Fieri igitur poteſt, quod proponebatur.

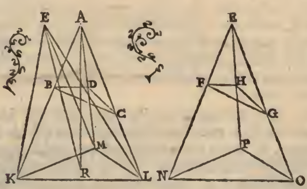


PRO-

PROPOSITIO VII.

Pyramides ſimilibus, & æqualibus triangulis comprehenſæ inter ſe ſunt æquales.

Sint pyramides A B C D, E F G H, ſimilibus, & æqualibus triangulis comprehenſæ, & ſi ſint ſimiliter poſitæ, quarum vertices A, E, baſes autem triangula B C D, F G H. Dico pyramidem A B C D, pyramidi E F G H, æqualem eſse. A punctis enim A, E, manantia latera inferius producantur, & prædictis lateribus maiores, inter ſe autem æquales abſcindantur A K, A L, A M, E N, E O, E P,



& conſtruantur pyramides A K L M, E N O P: pyramides igitur hæ æqualibus, & ſimilibus triangulis comprehenden tur, vt colligitur ex ipſa conſtructione; triangulis igitur inter ſe æquilateris, & æquiangulis K L M, N O P, inter ſe congruentibus non congruat, ſi fieri poteſt, pyramis E N O P, pyramidi A K L M, ſed cadat vertex E, pyramidis E N O P, extra verticem A, pyramidis A K L M, & ex puncto A,

ad

ad centrum circuli tranſeuntis per tria puncta K,L,M,quod ſit R, ducatur recta A R, & E R iungatur. Quoniam igitur æquales rectæ ſunt A K, A L, A M, quæ ex puncto A, in ſublimi pertinent ad ſubiectum planum: & punctum R, eſt centrum circuli tranſeuntis per puncta N,O,P; cadet recta A R ad ſubiectum planum perpendicularis. Eadem ratione recta E R ducta à vertice E, pyramidis E N O P, ad centrum R, circuli tranſeuntis per puncta N, O, P, hoc eſt, per puncta K, L, M, illis congruentia, cadet ad idem planum, ad quod linea A R, perpendicularis; itaque ab eodem puncto R, ad idem planum,& ad eaſdem partes duæ perpendiculares erunt excitatæ, quod fieri non poteſt: punctum igitur E non cadet extra punctum A: quare latus E N, congruet lateri A K, quorum E F, eſt æqualis A K; igitur & E F, ipſi A B, congruet. eadem ratione latus A G, congruet lateri A C, & latus E H, lateri A D, & triangula triangulis,& pyramis E F G H, pyramidi A B C D, & ipſi æqualis erit. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc facile colligitur omnia ſolida, quæ in pyramides æqualibus, & ſimilibus triangulis comprehenſas multitudine æquales diuidi poſſunt, eſſe inter ſe æqualia. Quocirca omnia priſmata, & pyramides, & octahedra, omnia denique corpora regularia æqualibus, & ſimilibus planis comprehenſa inter ſe æqualia erunt.

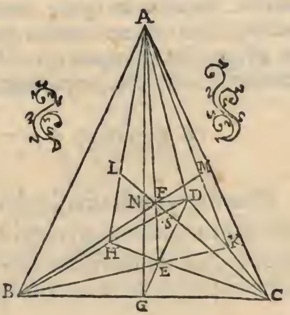
PROPOSITIO VIII.

Omnis pyramidis triangulam baſim habentis quatuor axes ſecant ſe in vno puncto in eaſdem ra-

tiones, ita vt ſegmenta, quæ ad angulos, eorum, quæ ad oppoſita triangula, ſint tripla; ex quo puncto tota pyramis diuiditur in quatuor pyramides æquales. Et in nullo alio puncto quatuor rectæ lineæ ductæ ab angulis ad triangula oppoſita pyramidis ſecant ſeſe in eaſdem rationes. Vocetur autem punctum hoc centrum dictæ pyramidis.

Sit pyramis A B C D, cuius vertex A, baſis autem triangulum B C D, axes A E, B M, C L, D N, vnde quatuor triangulorum, quæ ſunt circa pyramidem A B C D, centra erunt grauitatis E, L, M, N. Dico quatuor lineas A E, B M, C L, D N, ſecare ſe ſe in vno puncto in eaſdem rationes, quas prædixi, & quæ ſequuntur. Nam ex puncto A, ducatur recta A L H, quæ ob trianguli A B D, centrum L, ſecabit latus B D, bifariam in puncto H; iuncta igitur C E, & producta conueniet cum A L H, vt in puncto H. eadem ratione iunctæ A M, B E, & productæ conuenient in medio lateris C D, conueniant in puncto K, necnon A N, D E, in medio ipſius B C, vt in puncto G. Quoniam igitur ob triangulorum centra, eſt vt C E ad E H, ita A L ad L H, dupla enim eſt vtraque vtriuſque, ſecabunt ſeſe rectæ A E, C L, inter eaſdem parallelas; quare vt A F ad F E, ita erit C F ad F L, circum æquales angulos ad verticem: triangula igitur A F L, C F E; & reciproca, & æqualia inter ſe erunt. Cum igitur ſit vt A L ad L H, ita C E ad E H, hoc eſt vt triangulum A F L ad triangulum F L H, (ſi ducatur F H) ita triangulum C F E, ad triangulum F E H, erunt inter ſe æqualia triangula F E H, F L H. Quare vt triangulum A F H, ad triangulum F L H, hoc eſt vt A H ad H L, ita erit triangulum A F H ad triangulum F E H, hoc eſt A F ad F E: ſed recta A H, eſt tripla ipſius L H; igitur & A F, erit ipſius F E, tripla:

tripla: ſed vt A F, ad F E, ita eſt C F, ad F L; tripla igitur erit C F, ipſius F L. Similiter oſtenderemus rectas A E, B M, ſecare ſe ſe in eaſdem rationes, ita vt ſegmenta, quæ ad angulos, ſint tripla eorum, quæ ſunt ad centra E, M, quorum A F, eſt tripla ipſius F E: in puncto igitur F, ſecant ſe rectæ lineæ A E, B M. Eadem ratione & rectæ A E, D N, ſecent ſe in puncto F, neceſſe erit: quare vt A F ad F E, ita erit D F ad F N. Quatuor igitur axes pyramidis A B C D, ſecant ſe ſe in puncto F, in eaſdem rationes, ita vt ſegmenta ad angulos, ſint reliquorũ tripla. Rurſus, quia componendo, & conuertendo, eſt vt F E ad E A, ita F L ad L C: hoc eſt, vt pyramis B C D F, ad pyramidem A B C D, ita pyramis A B D F, ad pyramidem C B D A, (propter baſium communitatem, & vertices in eadem recta linea) erit



pyramis A B D F, æqualis pyramidi B C D F. Eadem ratione tam pyramis A C D F, quàm pyramis A B C F, æqualis eſt pyramidi B C D F. Quatuor igitur pyramides, quarum communis vertex punctum F, baſes autem triangula, quæ ſunt circa pyramidem A B C D, inter ſe æquales erũt, & vnaquæque pyramidis A B C D, pars quarta. Dico in nullo alio puncto à puncto F, quatuor rectas, quæ ab angulis ad triangula oppoſita pyramidis A B C D, ducantur, ſecare ſe in eaſdem rationes. Si enim fieri poteſt ſecent ſe tales rectæ in eaſdem rationes in alio puncto S. Simi-

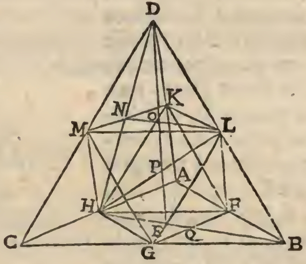
liter igitur vt ante oſtenderemus, vnamquamque quatuor pyramidum, quarum commúnis vertex S, baſes autem triangula, quæ ſunt circa pyramidem A B C D, eſse quartam partem pyramidis A B C D. Siue igitur punctum S, cadat intra vnam priorum quatuor pyramidum, ſiue in earum aliquo latere, ſeu triangulo; neceſſario erit pars æquali toti; tam enim tota vna pyramis quatuor priorum, quarum communis vertex F, quàm eius pars, vna quatuor pyramidum poſteriorum, quarum communis vertex S, erit eiuſdem A B C D, pyramidis pars quarta. Ex abſurdo igitur non in alio puncto à puncto F ſecabunt ſe in eaſdem rationes quatuor rectæ, quæ ab angulis ad oppoſita triangula pyramidis A B C D, ducantur. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO IX.

Omnis pyramis baſim habens triangulam diuiditur in quatuor pyramides æquales, & ſimiles inter ſe, & toti, & vnum octaedrum totius pyramidis dimidium, ipſique concentricum.

Sit pyramis A B C D, cuius baſis triangulum A B C, ſectisque omnibus lateribus bifariam, iungantur rectæ F G, G H, H F, F K, K L, L M, M K, K H, H M, G L, L F. Dico quatuor pyramides D K L M, L F B G, K H F A, M H G C, æquales eſse, & ſimiles inter ſe, & toti pyramidi A B C D: octaedrum autem eſse L F G M K H, & dimidium pyramidis A B C D, ipſique concentricum. Ducantur enim rectæ D N H, B Q H, L N: & poſita B E, dupla ipſius B H, iungatur D O C, in triangulo D B H, & ponatur D P, ipſius P E, tripla, & connectantur rectæ L P, P H. Quoniam igitur E, eſt centrum trianguli A B C, erit

erit axis D E, pyramidis A B C D, cuius axis ſegmentum D P eſt triplum ipſius P E: igitur P centrum erit pyramidis A B C D. Et quoniam tres rectæ F K, K H, H F, ſunt parallelæ tribus B D, D C, C B, pro vt inter ſe reſpondent, vt K H, ipſi L G, quoniam vtraque lateri D C, ob latera triangulorum ſecta proportionaliter in punctis K, H, L, G: & ſic de reliquis; erit pyramis A K F H, ſimilis toti pyramidi A B C D. Similiter vnaquæque trium aliarum pyramidum abſciſſarum, videlicet F L B G, G H M C, K D L M, ſimilis erit pyramidi A B C D, atque ideo inter ſe ſimiles. Rurſus, quoniam pyramidum ſimilium latus A D eſt duplum lateris A K, homologi; pyramis A B-C D, octupla erit pyramidis A K F H, ob triplicatam laterum homologorum proportionem. Similiter vnaquæque trium reliquarum pyramidum abſciſſarum erit octaua pars pyramidis A B C D:

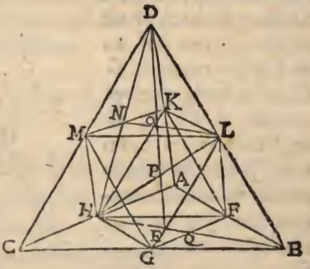


quatuor igitur pyramides abſciſſæ ſimul ſumptæ dimidium erit pyramidis A B C D: & reliquum igitur ſolidum demptis quatuor pyramidibus, dimidium pyramidis A B C D. Dico reliquum ſolidum L K M G F H, eſſe octaedrum. Nam octo triangulis ipſum contineri manifeſtum eſt. bina autem oppoſita eſſe parallela, & æqualia, & ſimilia, ſic oſtendimus. Quoniam enim triangulum F G H, eſt in plano trianguli A B C, plano trianguli K L M parallelo; erit triangulum F G H, parallelum triangu-

lo

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

lo KLM: ſed triangulum FGH, eſt ſimile triangulo ABC, & triangulum KLM, ſimile eidem triangulo ABC; triangulũ ergo FGH, ſimile erit triangulo KLM: ſed & æquale propter æqualitatem laterum homologorum. Similiter oſtenderemus reliquum ſolidum LKMGFH continentia triangula bina oppoſita æqualia inter ſe, & ſimilia, & parallela; octaedrum eſt igitur LKMGFH. Dico iam punctum P, quod eſt centrum pyramidis ABCD, eſſe centrum octaedri LKMGFH. Quoniam enim DP, ponitur tripla ipſius PE, & DO, eſt æqualis OE (ſiquidem planum trianguli KLM, plano triãguli ABC, parallelum ſecat proportione oẽs rectas lineas, quæ ex puncto D, in ſublimi pertinent ad ſubiectum planum trianguli ABC) erit OP, ipſi PE, æqualis. Et quoniam BH eſt dupla ipſius QH, quarum BE eſt dupla ipſius



EH, ſiquidem E eſt centrum trianguli ABC; erit reliqua EH reliquæ EQ dupla: & quia eſt vt LD ad DB, ita LN ad BH, propter ſimilitudinem triangulorum, & eſt LD, dimidia ipſius BD, erit & LN, dimidia ipſius BH: ſed QH eſt dimidia ipſius BH; æqualis igitur LN ipſi QH. Iam igitur quia eſt vt BE ad EH, ita LO ad ON: ſed BE, eſt dupla ipſius EH; dupla igitur LO, erit ipſius ON: ſed & QH erat dupla ipſius QE; vt igitur LN ad NO, ita erit HQ ad QE: &

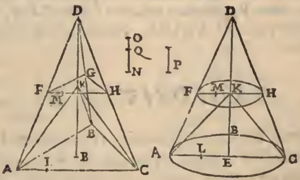
per conuerſionem rationis, vt N L ad L O, ita Q H, ad H E: & permutando, vt L N ad Q H, ita L O ad E H: ſed L N, oſtenſa eſt æqualis Q H; æqualis igitur L O, erit ipſi E H; ſed & O P, eſt æqualis ipſi P E, vt oſtendimus: duæ igitur L O, O P, duabus H E, E P æquales erunt altera alteri, & angulos æquales continent L O P, P E H, parallelis exiſtentibus L N, B H ſectionibus trianguli D B H, quæ fiunt à duobus planis parallelis; baſis igitur L P, trianguli L O P, æqualis eſt baſi P H, trianguli P E H, & angulus O P L, angulo E P H in plano trianguli D B H, in quo D P E, eſt vna recta linea; igitur L P H, erit vna recta linea, quæ cum ſit axis octaedri L K M G F H, & ſectus ſit in puncto P, bifariam, erit punctum P, centrum octaedri L K M G E H. ſed & centrum pyramidis A B C D. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO X.

Omne fruſtum pyramidis triangulam baſim habentis, ſiue coni, ad pyramidem, vel conum, cuius baſis eſt eadem, quæ maior baſis fruſti, & eadem altitudo, eam habet proportionem, quam duo latera homologa, vel duæ diametri baſium ipſius fruſti, vnà cum tertia minori proportionali ad prædicta duo latera, vel diametros; ad maioris baſis latus, vel diametrum. Ad priſma autem, vel cylindrum, cuius eadem eſt baſis, quæ maior baſis fruſti, & eadem altitudo; vt tres prædictæ deinceps proportionales ſimul, ad triplam lateris, vel diametri maioris baſis.

Sit

Sit fruſtum A B C F G H, pyramidis,vel coni A B C D, cuius baſis triangulum, vel circulus A B C, axis autem D E: & vt eſt A C ad F H, ita ſit F H ad N, & fruſti axis E K, nec non idem pyramidis, vel coni A B C K, vt ſit eadem altitudo. Dico fruſtum A B C F G H, ad pyramidem, vel conum, A B C K, eſse vt tres lineas A C, F H, N O, ſimul ad ipſius A C, triplam: ad priſma autem, vel cylindrum,cuius baſis A B C, altitudo autem eadem cum fruſto, vt tres A C, F H, N O, ſimul, ad ipſius A C, triplam. Nam vt eſt A C ad F H, & F H ad N O, ita ſit N O ad P: & exceſſus, quo hæ



quatuor lineæ differunt, ſint A L, F M, O Q. Ergo vt A C ad F H, ita erit A L ad F M, & F M ad O Q. Quoniam igitur eſt vt A C ad P, ita pyramis, vel conus A B C D, ad ſimilem ipſi pyramidem,vel conum D F G H, ob triplicatam laterum homologorum proportionem; erit diuidendo, vt tres A L, F M, O Q, ſimul ad P, ita fruſtum A B C F G H, ad pyramidem, vel conum D F G H: ſed conuertendo eſt vt P, ad A C, ita pyramis, vel conus D F G H, ad pyramidem, vel conum A B C D: ex æquali igitur, vt tres A L, F M, O Q, ſimul ad A C, ita fruſtum

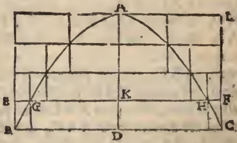
A B C D

A B C D F G H, ad pyramidem, vel conum A B C D. Rurſus quoniam axis D E, & latera pyramidis, vel coni A B C D, ſecantur plano trianguli, vel circuli F G H, baſi A B C, parallelo; erit componendo, vt A D, ad D F, hoc eſt, vt A C ad F H, propter ſimilitudinem triangulorum, hoc eſt vt A C, ad C L, ita E D, ad D K; & per conuerſionem rationis, vt A C, ad A L, ita D E, ad E K: ſed vt D E ad EK, ita eſt pyramis, vel conus A B C D, ad pyramidem, vel conum A B C K; vt igitur A C, ad A L, ita eſt pyramis, vel conus A B C D, ad pyramidem, vel conum A B C K; ſed vt tres lineæ A L, F M, O Q ſimul ad A C, ita erat fruſtum A B C F G H, ad pyramidem, vel conum A B C D; ex æquali igitur, erit vt tres lineæ A L, F M, O Q, ſimul ad A L, ita fruſtum A B C F G H, ad pyramidem, vel conum A B C K. Rurſus, quoniam tres exceſſus A L, F M, O Q, ſunt deinceps proportionales in proportione totidem terminorum A C, F H, N O, erunt vt A L, F M, O Q, ſimul ad A L, ita A C, F H, N O, ſimul ad A C: ſed vt A L, F M, O Q, ſimul ad A L, ita erat fruſtum A B C F G H, ad pyamidem, vel conum A B C K; vt igitur tres lineæ A C, F H, N O, ſimul, ad A C, ita erit fruſtum A B C F G H, ad pyramidem, vel conum A B C K. Sed vt A C, ad ſui triplam, ita eſt pyramis, vel conus A B C K ad priſma, vel cylindrum, cuius eſt eadem baſis A B C, & eadem altitudo cum pyramide, vel cono A B C K; ex æquali igitur, erit vt tres lineæ A C, F H, N O, ſimul ad ipſius A C, triplam, ita fruſtum A B C F G H, ad priſma, vel cylindrum, cuius baſis A B C, & eadem altitudo pyramidi, vel cono A B C K: ideſt eadem, fruſto A B C F G H. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XI.

Omni ſolido circa axim in alteram partem deficienti, cuius baſis ſit circulus, vel ellypſis, figura quædam ex cylindris, vel cylindri portionibus æqualium altitudinum inſcribi poteſt, & altera circumſcribi, ita vt circumſcripta ſuperet inſcriptam minori exceſſu quacumque magnitudine propoſita.

Sit ſolidum ABC, circa axim AD, in alteram partem deficiens, cuius vertex A, baſis autem circulus, vel ellypſis, cuius diameter BC. Igitur ſuper hanc baſim circa axim AD, intelligatur deſcriptus cylindrus, vel cylindri portio BL, quæ ſolidum ABC, comprehendet: ſectoque cylindro, vel cylindri portione BL, planis baſi parallelis in tot cylindros, vel cylindri portiones æqualium altitudinum, vt quilibet eorum ſit minor magnitudine propoſita; eſto ſolidum ABC, ſectum prædictis planis: erunt autem ſectiones circuli, vel ellypſes ſimiles inter ſe & baſi BC, ſolidi ABC ſuper quas ſectiones tamquam baſes cylindris, vel cylindri portionibus æqualium altitudinum intra, atque extra figuram conſtitutis, quorum bini inter eadem plana parallela inter ſe referuntur



runtur, veluti B F, & G D H, quorum axis communis eſt D K, baſes autem circuli, vel ellypſes E F, G H, quarum commune centrum K: ſupremus autem, qui ad A, ad nullum refertur. Quoniam igitur ex conſtructione, cylindrus, vel cylindri portio B F, eſt minor magnitudine propoſita; exceſsus autem omnes, quibus cylindri, ex quibus conſtat figura circumſcripta, excedunt eos, ex quibus conſtat figura inſcripta, pro vt bini inter ſe referuntur, vna cum ſupremo, qui ad nullum refertur, ſunt æquales cylindro, vel cylindri portioni B F, figura circumſcripta ſolido A B C, excedet inſcriptam minori exceſſu magnitudine propoſita. Fieri igitur poteſt quod proponebamus.

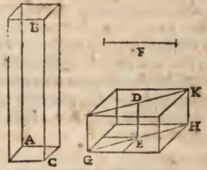
PROPOSITIO XII.

Dato parallelepipedo erecto circa datam rectam lineam tamquam axim, erectum parallelepipedum æquale conſtituere.

Sit datum parallelepipedum A B, erectum, cuius baſis A C, altitudo autem latus B C: & data recta linea finita E D. Oportet circa rectam E D, tamquam axim parallelepipedo A B, æquale parallelepipedum erectum conſtituere. Per punctum igitur E, extendatur planum erectum ad lineam E D, & vt eſt D E, ad B C, ita fiat baſis A C, ad quadratum F: & ad punctum E, in plano erecto ad lineam E D, quartæ parti quadrati F, æquale G E, quadratum deſcribatur, & compleatur quadratum G H, quadruplum quadrati E G, ſeu quadrato F, æquale: & ex puncto K, erecta K L, ipſi E F, æquali, & ad ſubiectum planum perpendiculari ſuper baſim G H, conſtituatur parallelepipedum G K. Dico

 pa-

parallelepipedum G K, eſſe æquale parallelepipedo A B; & rectam D E, axim parallelepipedi G K. Iungantur enim baſium oppoſitarum diametri G H, L K. Quoniam igitur quadrata ſunt E G, G H, communemque habent angulum, qui ad G, conſiſtent circa diametrum G H; in recta igitur G H, erit punctum E. Et quoniam quadratum G H, eſt quadrati E G, quadruplum; erit diameter G H, diametri E G, dupla; punctum igitur E, erit in medio diametri G H. Rurſus, quoniam ob parallelepipedum G K, recta G L, æqualis eſt, & parallela ipſi K H, erit L H, parallelogrammum: & quia vtraque D E, K H, eſt ad ſubiectum planum perpendicularis, parallelæ erunt, & in eodem plano parallelogrammi L H; in quo cum L G, ſit parallela ipſi K H; erit & E D, ipſi L G, parallela: eſt autem, & æqualis vtrilibet ipſarum G L, G H, oppoſitarum; punctum igitur D, eſt in recta L K, & tam K D, ipſi E H, quàm L D, ipſi E G, æqualis erit, & inter ſe æquales L D, D K. punctum igitur D, erit in medio diametri L K; ſed & punctum E, erat in medio diametri G H; recta igitur E D, axis eſt parallelepipedi G K, cuius parallelepipedi cum altitudo D E, ſit ad B C, altitudinem parallelepipedi A B, vt eſt baſis A C, ad quadratum F, hoc eſt ad baſim G H, parallelepipedi G K; parallelepipedum G K, parallelepipedo A B, æquale erit, Factum igitur eſt quod oportebat.

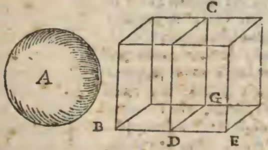


PRO-

PROPOSITIO XIII.

Cuilibet figuræ ſolidæ parallelepipedũ æquale poteſt eſſe.

Sit quælibet figura ſolida A. Dico ſolido A, parallelepipedum æquale poſse exiſtere. Exponatur enim parallelepipedum B C, cuius baſis B G. Quoniam igitur eſt vt ſolidum B C, ad ſolidum A, ita recta linea, ſiue latus B D, ad aliam rectam lineam; producto latere B D, ſit vt B C, ad A, ita recta B D, ad rectam D E, & compleatur parallelepipedum C E. Quoniam itaque eſt vt B D, ad D E, ita parallelogrammum ſiue baſis B G, ad parallelogram-



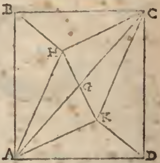
mum, ſiue baſim E G; hoc eſt parallelepipedum B C, ad parallelepipedum C E: ſed vt B D, ad D E, ita eſt parallelepipedum B C, ad ſolidum A; vt igitur parallelepipedum B C, ad ſolidum A, ita erit parallelepipedum B C, ad parallelepipedum C E; parallelepipedum igitur C E æquale erit ſolido A. Quod fieri poſse propoſuimus.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Omnis parallelogtammi centrum grauitatis diametrum bifariam diuidit.

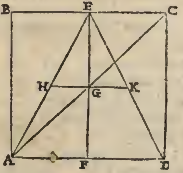
Sit parallelogrammum A B C D, cuius duo latera A B, B C, ſint primum inæqualia: & quoniã omne parallelogrammum habet ſaltem duos angulos oppoſitos non minores recto, eſto vterque angulorum B, D, non minor recto, ſitque ducta diameter A C, ſectaque in puncto G, bifariam. Dico G, eſse centrum grauitatis parallelogrammi ABCD. Trianguli enim A B C, ſit centrum grauitatis H; iunctaque H G, & producta, ponatur G K, æqualis G H, & rectæ à punctis K, H, ad angulos ducantur. Quoniam igitur A G, eſt æqualis G C, & G H, ipſi G K, & angulus A G K, æqualis angulo C G H, erit baſis A K, æqualis baſi C H, & angulus G A K, æqualis angulo G C K: ſed totus angulus D A K, æqualis eſt toti angulo B C A; reliquus igitur D A K, reliquo B C H, æqualis erit, circa quos angulos latus B C eſt æquale lateri A D, & C H, ipſi A K; angulus igitur C B H, æqualis erit



angulo A D K. Similiter oſtenderemus angulum C A H, angulo A C K, & angulum B A H, angulo D C K, & angulum A B H, angulo C D K, æquales eſse: ſed latera triangulorum, cum quibus rectæ ductæ à punctis K, H, ad angulos triangulorum ſimilium A B C, C D A, ſunt homolo-

mologa; puncta igitur K, H, in prædictis triangulis ſunt ſimiliter poſita. Rurſus quoniam angulus A B C, non eſt minor recto, acuti erunt reliqui A C B, B A C; igitur latus A C, maximum erit: ponitur autem A B maius, quàm B C; triangulum igitur A B C, ſcalenum erit. Eadem ratione ſcalenum eſt triangulum A C D. Quare in triangulo A C D, vnum duntaxat punctum K, ſimiliter poſitum erit, ac punctum H, in triangulo A B C. Cum igitur H ſit centrum grauitatis trianguli A B C, erit & K, centrum grauitatis trianguli A C D. Sed longitudo G K, æqualis eſt longitudini G H; punctum igitur G erit centrum grauitatis parallelogrammi A B C D, in quo nimirum ſecta eſt bifariam diameter A C: quare ſi ducatur altera diameter B D, in medio etiam diametri B D, erit idem centrum grauitatis G.

Sed ſint omnia latera æqualia parallelogrãmi A B C D, Sectiſque duobus lateribus A D, B C, bifariam in E, F iungantur E F, A E, E D, A G C, & per punctum G, ducatur ipſi A D, vel B C, parallela H G K. Quoniam igitur E C, eſt æqualis A F, erit C G æqualis A G, & E G, æqualis G F, propter ſimilitudinem triangulorum: nec non E H, ipſi A H, & E K, ipſi K D: tres igitur diametri A C, A E, E D, erunt ſectæ bifariam



in punctis K, G, H: & quoniam ex æquali propter triangula ſimilia eſt vt A F, ad F D, ita H G, ad G K, erit H G, æqualis ipſi G K: ſed puncta K, H, ſunt centra grauitatis parallelogrammorum B F, F C; igitur totius parallelogrammi A B C D, centrum grauitatis erit G, in medio

dia-

diametri A G. Quod eſt propoſitum.

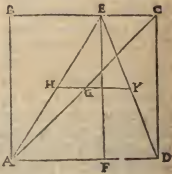
COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, omnis parallelogrammi centrum grauitatis eſſe in medio rectæ, quæ oppoſitorum bipartitorum laterum ſectiones iungit.

PROPOSITIO XV.

Si quodlibet parallelogrammum in duo parallelogramma diuidatur, & eorum cẽtra grauitatis iungantur recta linea; totius diuiſi parallelogrammi centrum grauitatis prædictam lineam ita diuidit, vt eius ſegmenta è contrario reſpondeant prædictis partibus parallelogrammis.

Sit parallelogrammum A B C D, ſectum in duo parallelogramma A E, E D, & parallelogrammi A E, ſit centrum grauitatis H, parallelogrammi autem E D, centrum grauitatis K: & parallelogrammi A B C D, ſit centrum grauitatis G: & iungatur K H. Dico rectam K H, diuidi à puncto G, ita vt ſit K G, ad G H, vt eſt parallelogrammum A E, ad parallelogrammum



E D, Iungantur enim diametri A C, A E, E D. Igitur per

per præcedentem ſectæ erunt hæ diametri bifariam in punctis H, G, K. Quoniam igitur eſt vt E H, ad H A, ita E K ad K D, parallela erit K H, ipſi A D; igitur & E C; ſed recta K H, ſecat latus A E, trianguli A E C, bifariam in puncto H, ergo & latus A C, bifariam ſecabit; igitur in puncto G. punctum igitur G, eſt in linea K H. Rurſus, quoniam eſt vt G A, ad A C, ita G H, ad E C, propter ſimilitudinem triangulorum; ſed dimidia eſt G A, ipſius A C, igitur & G H, erit dimidia ipſius E C, hoc eſt ipſius F D. Similiter oſtenderemus dimidiam eſse K H ipſius A D. vt igitur K H, ad A D, ita erit G H, ad F D: & permutando, vt A D, ad D F, ita K H, ad H G, & diuidendo, vt A F, ad F D, hoc eſt vt parallelogrammum A F, ad parallelogrammum E D, ita K G, ad G H. Quod demonſtrandum erat.

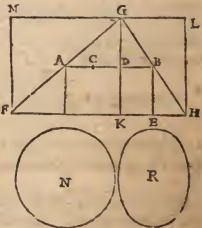
PROPOSITIO XVI.

Plana grauia æquiponderant à longitudinibus ex contraria parte reſpondentibus.

Sint plana grauia N, R, quorum centra grauitatis ſint N, R, & longitudo aliqua A B: & vt eſt N, ad R, ita ſit B C, ad C A. Dico ſuſpenſis magnitudinibus ſecundum centra grauitatis N, in puncto A, & R, in puncto B, vtriuſque magnitudinis N, R, ſimul centrum grauitatis eſse C. Nam ſi N, R, magnitudines ſint æquales, manifeſtum eſt propoſitum. Si autem inæquales, abſcindatur B D, æqualis A C, vt ſit A D, ad D B, vt B C, ad C A. Et quoniam ſpacio R, rectangulum æquale poteſt eſse; applicetur ad lineam B D, rectangulum B D K E, æquale quartæ parti rectanguli æqualis ipſi R, hoc eſt quartæ parti ipſius R; & poſita D G, æquali, & in directum ipſi D K,

E ducan-

ducantur rectæ G B H, G A F, quæ cum K E, producta conueniant in punctis F, H: & fiant parallelogramma F L, A K. Quoniam igitur eſt vt N, ad R, ita B C, ad C A, hoc eſt A D, ad D B, hoc eſt rectangulum A K, ad rectangulum B K; erit permutando vt rectangulum A K, ad N, ita rectangulum B K, ad R; ſed rectangulum B K, eſt pars quarta ipſius R, ergo & rectangulum A K, erit pars quarta ipſius N. Rurſus quia eſt vt G D, ad D K, ita G A, ad A F, & G B, ad B H: ſed G D eſt æqualis D K; ergo & G A, ipſi A F, & G B, ipſi B H, æquales erunt & centra grauitatis A, quidem rectanguli M K, B, vero rectanguli K L, & rectangulum A K, pars quarta ipſius M K, quemadmodum & B K ipſius K L; ſed N, rectanguli A K, quadruplum erat, quemadmodum & R ipſius B K; igitur rectangulum M K, ſpacio N, & rectangulum K L, ſpacio R, æquale erit. Sed vt B C, ad C A, ita eſt N, ad R; vt igitur B C, ad C A, ita



rectangulum M K, ad rectangulum K L; ſed A eſt centrum grauitatis rectanguli M K, & B, rectanguli K L; totius ergo rectanguli F L, hoc eſt duorum rectangulorum M K, K L, ſimul centrum grauitatis erit C. Sed rectangulo M K, æquale eſt ſpacium N; & rectangulo K L, ſpacium R. Igitur ſi pro rectangulo M K, ſit ſuſpenſum N ſpacium ſecundum centrum grauitatis in puncto A, & pro rectangulo K L, ſpacium R, ſecundum centrum grauitatis

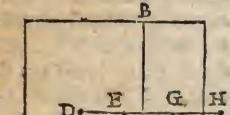
tatis in puncto B, ſpacia N, R, æquiponderabunt à longitudinibus A C, C B; eritque vtriuſque plani N, R, ſimul centrum grauitatis C. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt ſi cuiuslibet figuræ planæ vtcumque ſectæ centra grauitatis partium iungantur recta linea, talem lineam à centro grauitatis totius prædicti plani ita ſecari, vt ſegmenta ex contrario reſpondeant prædictis partibus.

PROPOSITIO XVII.

Si totum quoduis planum, & pars aliqua non habeant idem centrum grauitatis, & eorum centra iungantur recta linea; in ea producta ad partes centri grauitatis totius, erit reliquæ partis centrum grauitatis.



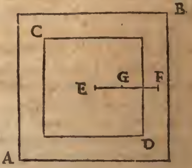
Sit totum quoduis planum A B C, cuius centrum grauitatis E, & pars illius A B, cuius aliud centrum D, & iuncta D E, producatur ad partes E, in infinitum vſque in H. Dico reliquæ partis B C, centrum grauitatis, quod ſit G, eſse in linea E H. Quoniam enim D, G, ſunt centra grauitatis partium A B, B C, cadet totius A B C, centrum grauitatis

E, in recta linea, quæ iungit centra D, G; tria igitur puncta D, E, G, ſunt in eadem recta linea. in qua igitur ſunt puncta D, E, in eadem eſt punctum G; ſed puncta D, E, ſunt in recta D H; igitur & punctum G, erit in recta D H: ſed extra ipſam D E, vt modo oſtendimus, in reliqua igitur E H. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XVIII.

Sit totum quoduis planum ſit vni parti concentricum ſecundum centrum grauitatis, & reliquæ erit concentricum. Et ſi partes inter ſe ſint concentricæ, & toti erunt concentricæ.

Sit totum quoduis planum A B, quod cum vna parte A C habeat commune centrum grauitatis E. Dico & reliquæ partis C D, eſſe idem centrum grauitatis E. Si enim illud non eſt, erit aliud; eſto F, & E F iungatur. Quoniam igitur partium A C, C D, centra grauitatis ſunt E, F; erit totius A B, in recta E F, centrum grauitatis: ſed & in puncto E, vnius ergo magnitudinis duo centra grauitatis erunt. Quod eſt abſurdum;



idem igitur E erit centrum grauitatis vtriuslibet partium A C, C D. Sed vtriuslibet partium A C, C D, ſit centrum grauitatis E. Dico idem E totius A B, eſſe centrum

trum grauitatis. Si enim non eſt, erit aliud, eſto G: & iuncta EG, producatur ad partes G, in infinitum vſque in F. Quoniam igitur E, eſt centrum grauitatis vnius partis AC, & G, totius AB; erit reliquæ partis CD, in linea GF centrum grauitatis: ſed & in puncto E; eiuſdem igitur magnitudinis AB, duo centra grauitatis erunt. Quod fieri non poteſt; totius igitur AB, erit centrum grauitatis idem E. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

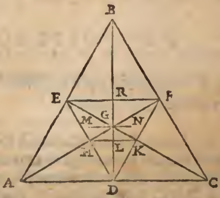
PROPOSITIO XIX.

Omnis trianguli rectilinei idem eſt centrum grauitatis, & figuræ.

Sit triangulum rectilineum ABC, cuius centrum G. Dico G, eſse centrum grauitatis trianguli ABC. Si enim fieri poteſt, ſit aliud punctum N, centrum grauitatis trianguli ABC, & per punctum G, ducantur rectæ AF, BD, CE, & DHE, ERF, FKD, KLH, & NG. Quoniam igitur quæ ab angulis A, B, C, ductæ ſunt rectæ lineæ per G, ſecant bifariam latera AB, BC, CA; erit triangulum EDF, ſimile triangulo ABC, ob latera parallela vt ſunt EF, AC. Et quoniam triangulum EDF, dimidium eſt cuius vis trium parallelogrammorum AF, BD, CE, æqualia inter ſe erunt ea parallelogramma omnifariam ſumpta, quorum centra grauitatis H, K, R; intelligantur autem tria parallelogramma AF, BD, CE, diſtincta penitus, ita vt inter ſe congruant ſecundum tria triangula DEF, inter ſe congruentia: trium igitur triangulorum DEF, inter ſe congruentium & centra grauitatis inter ſe congruent in puncto M. Quoniam igitur inter duas parallelas EF, KH, ſecant ſe rectæ lineæ FH, LR, in puncto G; erit vt FG, ad GH, ita RG, ad GL;

dupla

dupla igitur R G, eſt ipſius G L. Et quoniam in triangulo A G C, recta G D, ſecat A C, bifariam in puncto D; ipſi A C, parallelam K H, bifariam ſecabit in puncto L, duorum igitur æqualium parallelogrammorum A F, E G; ſimul, quorum centra grauitatis ſunt K, H, centrum grauitatis erit L. Sed duo parallelogramma A F, E C, ſimul ſunt parallelogrammi B D, duplum; trium igitur parallelogrammorum A F, E C, B D, ſimul: hoc eſt triãguli A B C, vnà cum duobus trium triangulorũ inter ſe congruentium E D F, centrum grauitatis erit G. Sed trianguli A B C, ponitur



centrum grauitatis N; producta igitur N G, occurret centro M, reliquæ partis, ideſt duorum triangulorum DEF; quare vt triangulum A B C, ad duo triangula D E F, ſimul, ita erit M G, ad G N. Sed triangulum A B C, eſt duplum duorum triangulorum E D F: igitur & M G, erit ipſius G N, dupla. Rurſus quoniam vtriuslibet duorum triangulorum E D F, centrum grauitatis erat M; erit ſimiliter poſitum M, in triangulo E D F, ac centrum N, in triangulo A B C, propter ſimilitudinem triangulorum: Sed propter hæc ſimiliter poſita centra, quia homologorum laterum eſt vt A B, ad D F, ita N G, ad G M: & A B, eſt dupla ipſius E B, erit & N G, dupla ipſius G M. Sed G M, erat dupla ipſius G N: igitur G N, erit ſui ipſius quadrupla. Quod eſt abſurdum. Non igitur centrum

graui-

grauitatis trianguli A B C, erit aliud à puncto G: punctum igitur G, erit centrum grauitatis trianguli A B C. Quod demonſtrandum erat.

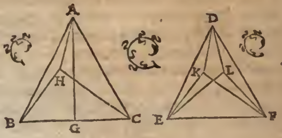
Quod autem ex huius theorematis demonſtratione liquet centrum grauitatis trianguli eſse in ea recta linea, quæ ab angulo ad bipartiti lateris ſectionem pertinet, Archimedes per inſcriptionem figuræ ex parallelogrammis demonſtrauit, aliter autem per diuiſionem trianguli in triangula nequaquam: qua enim ratione hoc ille tentat, ea ex nono theoremate eiuſdem prioris libri de æquiponderantibus neceſsario pendet. Cum igitur in illo anteceden ti ſit fallacia accipientis latenter ſpeciem trianguli; ſcalenum ſcilicet pro genere triangulo, neque conſequens erit demonſtratum. Quod autem dico manifeſtum eſt: Datis enim duobus triangulis ſimilibus, & in altero eorum dato puncto, quod ſit trianguli centrum grauitatis, punctum in altero triangulo modo ſimiliter poſitum ſit prædicto puncto, nititur demonſtrare eſse alterius trianguli centrum grauitatis: cum autem nondum conſtet centrum grauitatis trianguli eſse in recta, quæ ab angulo latus oppoſitum bifariam ſecat, ſed ex nono theoremate ſit demonſtrandum medio decimo, non poteſt illud accipi in nono theoremate, quod ad demonſtrationem eſset neceſsarium. permittitur igitur aduerſario ponere centrum grauitatis trianguli, vbicumque vult intra illius limites. atqui cum datis duobus triangulis iſoſceliis ſimilibus, & in altero eorum dato puncto, quod non ſit in prædicta recta linea, poſsint in altero duo puncta prædicto ſimiliter poſita inueniri, quorum vnum duntaxat concedet aduerſarius eſse alterius trianguli centrum grauitatis, non autem non ſimiliter poſitum, ex quo abſurdum infertur partem anguli æqualem eſse toti: quid quod datis duobus triangulis æquilateris, & in altero eorum dato puncto, quod non ſit centrum trianguli

guli, ſed aliqua earum, quæ ab angulis ad bipartitorum laterum ſectiones cadunt, neceſse eſt in altero triangulo tria puncta prædicto puncto eſse ſimiliter poſita? quod ſi etiam extra iſtas lineas cadat vnius trianguli punctum, neceſse eſt illi ſex puncta in altero triangulo eſse ſimiliter poſita: ſed ſi quod diximus de iſoſceliis ſimilibus, & æquilateris triangulis demonſtrauerimus, rem velut ante oculos expoſuerimus.

PROPOSITIO.

Datis duobus triangulis iſoſcelijs ſimilibus, & in altero eorum dato puncto extra rectam, quæ à vertice ad medium baſis cadit, duo puncta in reliquo triangulo prædicto puncto ſimiliter poſita inuenire.

Sint duo triangula iſoſcelia, & ſimilia, A B C, D E F: quorum in altero A B C, à vertice A, ad baſim B C, bipartitam in puncto G, cadat recta A G: atque extra hanc



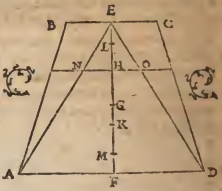
in triangulo A B C, ſit quoduis punctum H: & iuncta A H, fiat angulus E D K æqualis angulo B A H; & vt B A, ad A H,

AH, ita fiat ED, ad DK: & quoniam angulus BAG, æqualis eſt angulo EDF: quorum angulus EDK, æqualis eſt angulo BAH, erit reliquus angulus KDF, æqualis reliquo angulo HAC; ſed angulus HAC, eſt maior angulo BAH; ergo & angulus KDF, maior erit angulo BAH; poſito igitur angulo FDL, æquali angulo BAH, ac proinde minori, quàm ſit angulus FDK, fiat vt BA, ad AH, ita FD, ad DL. Dico, in triangulo EDF, duo puncta K, L, ſimiliter poſita eſse ac punctum H, in triangulo BAC. Iungantur enim rectæ AH, BH, CH, EK, KF, FL, LE. Quoniam igitur angulus EDK, eſt æqualis angulo BAH, qui lateribus homologis continentur; erit angulus DEK, æqualis angulo ABH: ſed totus angulus DEF, æqualis eſt toti angulo ABC; reliquus igitur angulus KEF, æqualis erit reliquo HBC: ſed ex æquali eſt vt CB, ad BH, ita FE, ad EK; igitur vt antea erit angulus KFE, æqualis angulo HCB, & angulus DFK, æqualis angulo ACH, & angulus FDK, æqualis angulo CAH; punctum igitur K, ſimiliter poſitum erit in triangulo EDF, ac punctum H, in triangulo ABC. Rurſus quoniam angulus FDL, æqualis eſt angulo BAH, & latus AB, homologum lateri DF, (eſt enim vt BA, ad AC, ita FD, ad DE) ſed vt BA, ad AH, ita eſt FD, ad DL, per conſtructionem; ſimiliter vt ante, oſtenderemus, punctum L, in triangulo EDF, ſimiliter poſitum eſse puncto H; inuenta igitur ſunt duo puncta in triangulo DEF, ſimiliter poſita ac punctum H, in triangulo BAC. Quod propoſitum erat.

PROPOSITIO XX.

Omnis trapezij habentis duo latera parallela centrum grauitatis eſt in illa recta, quæ prædictorum bipartitorum laterum ſectiones iungit. atque in eo puncto, in quo tertia pars eius media ſic diuiditur, vt ſegmentum propinquius minori parallelarum ad reliquum eam proportionem habeat, quam maior parallelarum ad minorem. Talis autem rectæ lineæ ſic diuiſæ, ſegmentum minorem parallelarum attingens eſt ad reliquum, vt dupla maioris parallelarum vna cum minori, ad duplam minoris vna cum maiori.

Sit trapezium A B C D, cuius duæ A D, B C, ſint parallelæ: ſitque A D, maior. Sectiſque A D, B C, bifariam in punctis F, E, iunctaque E F, & ſecta in tres partes æquales in punctis K, H, fiat vt A D, ad B C, ita H G, ad G K. Dico G, eſse centrum grauitatis trapezij A B C D: & vt eſt dupla ipſius A D, vna cum B C, ad duplam ipſius B C, vna cum A D, ita eſse E G, ad G F. Ducta enim per punctum H, ipſis A D, B C, parallela

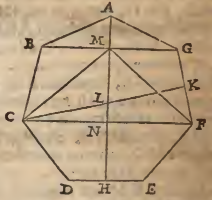


rallela N O, abſcindantur E L, F M, ipſi G K æquales, & iungantur A N E, E O D. Quoniam igitur N O ipſi A D, parallela ſecat omnes ipſis A D, E C, interceptas in eaſdem rationes, & eſt E H, pars tertia ipſius E F, erit & E N ipſius E A, & E O, ipſius E D, pars tertia. Eſt autem N O, parallela baſibus B E, E C, duorum triangulorum A B E, E C D; in ipſa igitur N O, erunt centra grauitatis duorum triangulorum A B E, E C D: ergo & compoſiti ex vtroque in linea N O, erit centrum grauitatis. Quoniam igitur K, centrum grauitatis trianguli A E D, eſt in E F, & totius trapezij A B C D, centrum grauitatis in eadem linea E F; erit & reliquæ partis, duorum ſcilicet triangulorum A B E, E C D, ſimul in linea E F, centrum grauitatis: ſed & in linea N O; in puncto igitur H. Rurſus quoniam triangula A E D, A B E, E C D, ſunt inter eaſdem parallelas, erit vt A D, ad B C, ita triangulum A E D, ad duo triangula A B E, E C D, ſimul: ſed vt A D, ad B C, ita eſt H G, ad G K; vt igitur triangulum A E D, ad duo triangula A B E, E C D, ſimul, ita erit H G, ad G K. ſed K, eſt centrum grauitatis trianguli A E D: & H, duorum triangulorum A B E, E C D, ſimul; totius igitur trapezij A B C D, centrum grauitatis erit G. Rurſus quoniam E L, eſt æqualis G K, æqualium E H, H K; erit reliqua L H, æqualis reliquæ G H; tota igitur E G; erit bis G H, vna cum G K: eadem ratione quoniam F M, eſt æqualis G K, & M K, æqualis G H, erit F G, bis G K, vna cum G H: vt igitur H G, bis vna cum G K, ad G K, bis vna cum G H, ita erit E G, ad G F. Sed vt H G, bis vna cum G K, ad G K bis vna cum G H, ita eſt A D, bis vna cum B C, ad B C, bis vna cum A B, propterea quod eſt vt A D, ad B C, ita H G, ad G K; vt igitur eſt A D, bis vna cum B C, ad B C, bis vna cum A D, ita erit E G, ad G F. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XXI.

Omnis polygoni æquilateri, & æquianguli idem eſt centrum grauitatis, & figuræ.

Sit polygonum æquilaterum, & æquiangulum ABC DEFG, cuius ſit primo laterum numerus impar, centrum autem ſit L. Dico punctum L, eſse centrum grauitatis polygoni ABCDEFG; ſectis enim duobus lateribus DE, FG, bifariam in punctis K, H, ducantur ab angulis oppoſitis rectæ AH, CK. & rectæ BMG, CNF, CM, MF, iungantur. Quoniam igitur ex decima tertia quarti Elem. quemadmodum in pentagono, ita in omni prædicto polygono imparium multitudine laterum plane colligitur centrum polygoni eſse in qualibet recta, quæ ab angulo ad medium lateris oppoſiti ducitur, quoniam ab omnibus angulis ſic ductæ ſecant ſe ſe in eadem proportione æqualitatis, ita vt eadem ſit proportio ſegmentorum, quæ ad angulos, ad ea, quæ ad latera



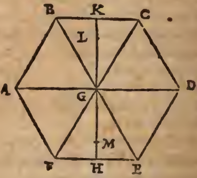
illis angulis oppoſita; rectæ AH, CK, ſecabunt ſe ſe in puncto L. Rurſus quoniam ex eadem Euclidis angulus BAL, æqualis eſt angulo GAL, ſed AB, eſt æqualis AG, & AM, communis, erit baſis BM, æqualis baſi

MG,

M G, & angulus A B M, angulo A G M, ſed totus A B C, toti A G F, eſt æqualis; reliquus igitur angulus C B G, reliquo B G F, æqualis erit: ſed circa hos æquales angulos recta B M, oſtenſa eſt æqualis rectæ M G, & C B, eſt æqualis G F; baſis igitur C M, baſi G F, & angulus C M B, angulo F M G, æqualis erit; ſed totus B M N, æqualis eſt toti G M N; quia vterque rectus; reliquus igitur C M N, reliquo N M F, æqualis erit, quos circa recta C M, eſt æqualis M F, & M N, communis; baſis igitur C N, baſi N F, & anguli, qui ad N, æquales erunt, atque ideo recti: ſed & qui ad M, ſunt recti, & B M, eſt æqualis G M; parallelæ igitur ſunt B G, C F, & trapezij C B G F, centrum grauitatis eſt in linea M N: ſed & trianguli A B G, centrum grauitatis eſt in linea A M; totius igitur figuræ A B C F G, centrum grauitatis eſt in linea A N; hoc eſt in linea A H. Rurſus quoniam omnis quadrilateri quatuor anguli ſunt æquales quatuor rectis: & tres anguli A B M, B M N, M N C, ſunt æquales tribus angulis F G M, G M N, M N F, reliquus angulus B C F, reliquo C F G, æqualis erit: ſed totus angulus B C D, eſt æqualis toti angulo G F E; reliquus ergo D C F, reliquo C F E, æqualis erit: ſed linea C N, eſt æqualis N F, & anguli, qui ad N, ſunt recti; ſimiliter ergo vt antea, centrum grauitatis trapezij C D E F, erit in linea A H: ſed & totius figuræ A B C F G, eſt in linea A H; totius igitur polygoni A B C D E F G, in linea A H, eſt centrum grauitatis, quod idem ſimiliter in linea C K, eſſe oſtenderemus; in communi igitur ſectione puncto L, eſt centrum grauitatis polygoni A B C D E F G. Similiter quotcumque plurium laterum numero imparium eſſet polygonum æquilaterum, & æquiangulum, ſemper deueniendo ab vno triangulo ad quotcumque eius trapezia; propoſitum concluderemus.

Sed

Sed eſto polygonum æquilaterum, & æquiangulum, A B C D E F, cuius laterum numerus ſit par, & centrum eſto G. Dico idem G, eſse centrum grauitatis polygoni A B C D E F. Iungantur enim angulorum oppoſitorum puncta rectis lineis A D, B E, C F. Ex quarto igitur Elem. ſecabunt ſeſe hæ rectæ omnes bifariam in vno puncto, quod talis figuræ centrum definiuimus: ſed G ponitur centrum; in puncto igitur G. Quoniam igitur duorum triangulorum C B G, G F E, anguli ad verticem B G C, F G E, ſunt æquales; & vterlibet angulorum C B G, G C B, æqualis eſt vtrilibet ipſorum E F G, G E F; ex quarto Elem. & circa æquales angulos latera proportionalia horum triangulorum ſunt æqualia; ſimilia, & æqualia erunt triangula B C G, G F E: poſitis igitur centris grauitatis K, H, duorum triangulorum EFG, G B C, iunctiſque K G, G H, erit vterlibet angulorum B G H, H G C, æqualis vtrilibet angulorum C G K, K G E, propter ſimilitudinem poſitionis centrorum K, H, in iſoſcelijs triangulis C B G, G F E: (nam G H, ſi produceretur latus B C, bifariam ſecaret: ſimiliter G K, latus E F) ſed C G, eſt in directum poſita ipſi G F; igitur & G H ipſi G K: & ſunt æquales, vtpote lateribus triangulorum B C G, G F E, æqualibus homologæ; cum igitur eorundem triangulorum centra grauitatis ſint K, H; centrum grauitatis duorum triangulorum C B G, G F E, ſimul, erit punctum G. Eadem



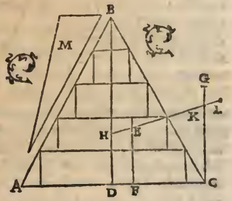
ratione

ratione, tam duorum triangulorum A B G, D G F, quàm duorum A F G, C D G, ſimul, centrum grauitatis erit G; totius igitur polygoni A B C D E F; centrum grauitatis erit idem G. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XXII.

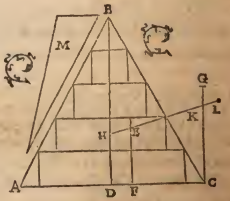
Omnis figuræ circa diametrum in alteram partem deficientis, in diametro eſt centrum grauitatis.

Sit figura A B C, circa diametrum B D, in alteram partem deficiens verſus B. Dico centrum grauitatis figuræ A B C, eſse in linea B D. ſit enim punctum E, generaliter extra lineam B D. Et per puncta E, C, ducantur ipſi B D, parallelæ E F, C G, & vt eſt C D, ad D F, ita ponatur figura A B C, ad aliquod ſpacium M: & figuræ A B C, inſcribatur figura ex parallelogrammis æqualium altitudinum deficiens à figura ABC, minori defectu, quam ſit ſpacium M, quantumcumque illud ſit: minor igitur proportio erit figuræ A B C, ad ſpacium M, hoc eſt minor proportio C D, ad D F, quàm figuræ A B C, ad ſui reliquum, dempta figura inſcripta. Quoniam autem diameter B D,



bifariam

biſariam ſecat omnia latera parallelogrammorum inſcriptorum baſi A C, parallela; erit in diametro B D, eorum omnium parallelogrammorum centra grauitatis, atque ideo totius figuræ inſcriptæ centrum grauitatis, quod ſit H: & H E K, ducatur. Quoniam igitur E F, parallela eſt vtrique D H, C K; erit vt C D, ad D F, ita K H, ad H E, ſed minor eſt proportio C D, ad D F, quàm figuræ A B C, ad reſiduum, dempta figura inſcripta; ergo & K H, ad H E, minor erit proportio, quàm figuræ A B C, ad prædictum reſiduum: habeat L K H, eandem proportionẽ ad E H, quàm figura A B C, ad prædictum reſiduum. Quoniam igitur punctum K, cadit extra figuram A B C; multo magis punctum L; non igitur punctum L, erit prædicti reſidui centrum grauitatis. Sed punctum H, eſt inſcriptæ figuræ centrum grauitatis: & vt figura inſcripta ad prædictum reſiduum, diuidendo, ita eſt L E, ad E H; non igitur E, eſt centrum grauitatis figuræ A B C: ſed ponitur E, generaliter punctum extra lineam B D; Nullum igitur punctum extra lineam B D, eſt centrum grauitatis figuræ A B C; in linea igitur B D, erit figuræ A B C, centrum grauitatis. Quod demonſtrandum erat.



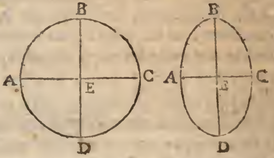
COROLLARIVM.

Ex huius theorematis demonſtratione conſtat, omnis figuræ planæ, ſiue ſolidæ, cuius termini omnis cauitas ſit interior, atque ideo intra terminum centrum grauitatis; & cuius pars aliqua eſse poſsit, quæ à tota figura deficiens minori defectu quacumque magnitudine propoſita habeat centrum grauitatis in aliqua certa linea recta intra terminum figuræ cqnſtituta, eſſe in ea recta linea totius figuræ centrum grauitatis. Ac proinde, cum per vndecimam huius, omni ſolido circa axim in alteram partem deficienti, & baſim habenti circulum, vel ellypſim figura inſcribi poſſit ex cylindris, vel cylindri portionibus, à prædicto ſolido deficiens minori ſpacio quacumque magnitudine propoſita: talis autem figuræ inſcriptæ, quemadmodum & circumſcriptæ centrum grauitatis ſit in axe, vt ex ſequentibus patebit, & nunc cogitanti facilè patere poteſt; manifeſtum eſt omnis ſolidi circa axim in alteram partem deficientis centrum grauitatis eſſe in axe.

PROPOSITIO XXIII.

Circuli,& Ellypſis idem eſt centrum grauitatis, & figuræ.

Sit circulus, vel ellypſis ABCD, cuius centrum E. Dico centrum grauitatis figuræ ABCD, eſse punctum E. Ducantur enim duæ diametri ad rectos inter ſe angulos AC, BD; in ellypſi autem ſint diametri coniugatæ. Quoniam igitur omnes rectæ lineæ, quæ in ſemicirculo, vel dimidia ellypſi diametro ducantur parallelæ bifariam ſecantur à ſemidiametro, & quo à baſi remotiores, eo ſunt



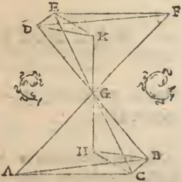
minores; erit centrum grauitatis ſemicirculi, ſiue dimidiæ ellypſis ABC, in linea BE; ſicut & ſemicirculi, ſiue dimidiæ ellypſis ADC, centrum grauitatis in linea DE. eſt autem BED, vna recta linea: in diametro igitur BD, erit centrum grauitatis circuli, ſiue ellypſis ABCD. Eadem ratione oſtenderemus idem centrum grauitatis eſse in altera diametro AC: in communi igitur vtriuſque ſectione puncto E. Quod demonſtrandum erat.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

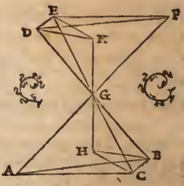
Si duarum pyramidum triangulas baſes habentium æqualium, & ſimilium inter ſe, tria latera tribus lateribus homologis fuerint in directum conſtituta, in vertice communi erit vtriuſque ſimul centrum grauitatis.

Sint duæ pyramides ſimiles, & æquales, quarum vertex communis G, baſes autem triangula A B C, D E F. Et ſint latera homologa pyramidum in directum inter ſe conſtituta: vt A G, G F: & B G, G D, & C G, G E. Dico compoſiti ex duabus pyramidibus ABCG, GDE F, ita conſtitutis centrum grauitatis eſse in puncto G. Eſto enim H, centrum grauitatis pyramidis A B C G, & ducta H G K, ponatur G K, æqualis G H, & iungantur E K, K D, B H, C H. Quoniam igitur eſt vt H G, ad G K, ita C G, ad G E, & proportio eſt æqualitatis: & angulus H G C, æqualis angulo EG K, erit triangulum C G H,



ſimile, & æquale triangulo E G K. Similiter triangulum B G H, triangulo D G K; & triangulum B G C, triangulo D G E: quare & triangulum B C H, triangulo D E K. pyramis igitur B C G H, ſimilis, & æqualis eſt pyramidi E D G K. Congruentibus igitur inter ſe duobus triangu-

lis æqualibus, & ſimilibus B G C, D G E, & pyramis B C G H, pyramidi G D E K congruet, & puncto K, punctum H: & eadem ratione pyramis A B C G, pyramidi D E F G. congruente igitur pyramide A B C G, pyramidi D E F G, & punctum K, congruet puncto H. ſed H, eſt centrum grauitatis pyramidis A B C G: igitur K, erit centrum grauitatis pyramidis D E F G: ſed eſt G K, æqualis ipſi G H; vtriuſque igitur pyramidis A B C G, D E F G, ſimul centrum grauitatis erit K; Quod demonſtrandum erat.

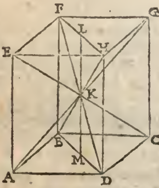


PROPOSITIO XXV.

Omnis parallelepipedi centrum grauitatis eſt in medio axis.

Sit parallelepipedum A B C D E F G H, cuius axis L M, isque ſectus bifariam in puncto K. Dico K eſse centrum grauitatis parallelepipedi A B C D E F G H. iungantur enim diametri A G, B H, C E, D F, quæ omnes neceſsario tranſibunt per punctum K, & in eo puncto bifariam diuidentur. Iunctis igitur B D, F H: quoniam triangulum E F K, ſimile eſt, & æquale triangulo C D K, propter latera circa æquales angulos ad ver-

verticem æqualia alterum alteri: eademque ratione, & triangulum E K H, triangulo B C K: & triangulum F K H, triangulo B D K; erit pyramis K E F H, ſimilis, & æqualis pyramidi K B C D: habent autem tria latera tribus lateribus homologis, ideſt æqualibus, in directum, prout inter ſe reſpondent, conſtituta; duarum igitur pyramidum K E F H, K B C D, ſimul centrum grauitatis erit K: non aliter duarum pyramidum K G F H, K B D A, ſimul centrum grauitatis erit K; totius igitur compoſiti ex quatuor pyramidibus; ideſt duabus oppoſitis A B C D K, E F G H K, centrum grauitatis erit idem K. Eadem ratione tam duarum pyramidum A E H D K, B C G F K, ſimul, quàm duarum A B F E K, C D H G K, ſimul centrum grauitatis erit K. Totius igitur parallelepipedi A B C D E F G K, centrum grauitatis erit K. Quod demonſtrandum erat.



PROPOSITIO XXVI.

Si parallelepipedum in duo parallelepipeda ſecetur, ſegmenta axis à centris grauitatis totius parallelepipedi, & partium terminata ex contrario parallelepipedi partibus reſpondent.

Sit

Si parallelepipedum A B, cuius axis C D, ſectum in duo parallelepipeda A E, E N, quare & axis C D, in axes C L, L D, parallelepipedorum A E, E N. Et ſint centra grauitatis; F, parallelepipedi E N, & G, parallelepipedi A E, & H, parallelepipedi A B, in medio cuiuſque axis ex antecedenti. Dico eſse F H, ad H G, vt parallelepipedum A E, ad E N, parallelepipedum. Iungantur enim diametri baſium oppoſitarum, quæ per puncta axium D, L, G, tranſibunt, A D M, K L E, N C B; iamque parallelogramma erunt A B, A E, E N, D B, D E, E C, propter eas, quæ parallelas iungunt, & æquales: quorum bina latera oppoſita ſecta erunt bifariam in punctis C, L, D, per definitionem axis: punctum igitur F, in medio rectæ C L, oppoſitorum laterum bipartitorum ſectiones coniungentis, erit parallelogrammi E N, centrum grauitatis. Eadem ratione & parallelogrammi A E, centrum grauitatis erit G, & H, parallelogrammi A B. Vt igitur parallelogrammum A E, ad parallelogrammum E N, hoc eſt, vt baſis M E, ad baſim E B; hoc eſt, vt parallelogrammum M O, ad parallelogrammum O B: hoc eſt, vt parallelepipedum A E, ad parallelepipedum E N: ita erit F H, ad H G. Quod demonſtrandum erat.

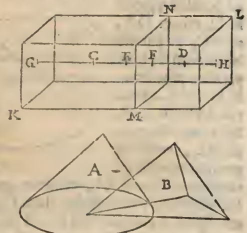


PRO-

PROPOSITIO XXVII.

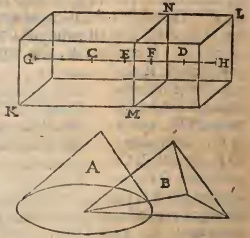
Solida grauia æquiponderant à longitudinibus ex contraria parte reſpondentibus.

Sint ſolida grauia A, & B, quorum centra grauitatis ſint A, B, ſecundum quæ ſuſpenſa intelligantur A, in puncto C, & B, in puncto D, cuiuslibet rectæ G H, quæ ſit ita diuiſa in puncto E, vt ſit D E, ad E C, vt eſt A, ad B. Dico ſolida A, E, æquiponderare à longitudinibus D E, E C; hoc eſt vtriuſque ſimul centrum grauitatis eſſe E. Nam ſi A, B, ſint æqualia, manifeſtum eſt propoſitum: ſi autem inæqualia, eſto maius A: maior igitur erit D E, quam E C. abſcindatur D F, æqualis E C: erit igitur D E, æqualis G F: & C D, vtrinque producta, ponatur D H, æqualis D F: & C G, ipſi C F. & circa axim, & altitudinẽ G H, eſto parallelepipedum K L, æquale duobus ſolidis A, B, ſimul & parallelepipedum K L, ſecetur plano per punctum F, oppoſitis planis parallelo, in duo parallelepipeda K N, M L. Quoniam igitur eſt vt G F, ad F H, ita parallelepipedum K N, ad parallelepipedum



M L,

M L, ſed vt G F, ad F H, ita eſt C F, ad F D, hoc eſt D E, ad E C, hoc eſt ſolidum A, ad ſolidum B; erit vt parallelepipedum K N, ad parallelepipedum M L, ita ſolidum A, ad ſolidum B. componendo igitur, & permutando, vt parallelepipedum K L, ad duo ſolida A, B, ſimul, ita parallelepipedum M L; ad ſolidum B: & reliquum ad reliquum: ſed parallelepipedum K L, æquale eſt duobus ſolidis A, B, ſimul: parallelepipedum igitur K N, ſolido A, & parallelepipedum M L, ſolido B, æquale erit. Rurſus, quoniam eſt vt G F, ad F H, ita C F, ad F D; hoc eſt D E, ad E C: ſed vt G F, ad F H, ita eſt parallelepipedũ K N, ad parallelepipedũ M L; erit vt D E, ad E C, ita parallelepipedum K N, ad parallelepipedum M L; ſed C eſt parallelepipedi K N, & D, parallelepipedi M L, centrum grauitatis; totius igitur parallelepipedi K L, centrum grauitatis erit E.



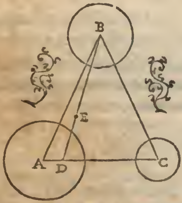
Igitur ſolido A, poſito ad punctum G, ſecundum centrum grauitatis A, & ſolidum B, ad punctum D, ſecundum centrum grauitatis B, quorum A, eſt æquale parallelepipedo K N, & B, parallelepipedo M L; ab iiſdem longitudinibus D E, E C, æquiponderabunt; eritque compoſiti ex vtroque ſolido A, B, centrum grauitatis E. Quod demonſtrandum erat.

Quod ſi quis à me quærat, cur non hic vtar quinta illa gene-

generali primi Archimedis de planis æquiponderantibus, ſed illud idem propoſitum vna demonſtratione in planis, altera præſenti in ſolidis demonſtrauerim. Reſpondeo: quia Propoſitio quarta primi Archimedis, ex qua quinta neceſſario pendet, habet, ſi quis attendat, aliquas difficultates phyſicas, quæ mathematicis rationibus non facilè diſſoluantur; quæ cauſa igitur illum adduxit ad ſimile quid demonſtrandũ demonſtratione ad illas duas parabolas applicata in ſecundo ſuo libro planorum æquiponderantium, quaſi qui quartæ, ac quintæ illi generali non ſatis acquieſceret; eadem me compulit ad hoc propoſitum duabus demonſtrationibus generalibus, altera de planis, altera de ſolidis grauibus ſecurius demonſtrandum.

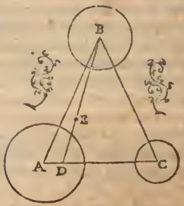
PROPOSITIO XXVIII.

Quarumlibet trium magnitudinum eiuſdem generis centra grauitatis cum centro magnitudinis ex ijs compoſitæ ſunt in eodem plano.



Sint quælibet tres magnitudines eiuſdem generis A, B, C: quarum centra grauitatis A, B, C. Ex ijs autem compoſitæ ſit centrum grauitatis E. Dico quatuor puncta A, B, C, E, eſſe in eodem plano. Iungantur enim rectæ A B, B C, C A: & vt A, ad C, ita ſit C D, ad D A, & B D, iungatur: punctũ igitur D, erit cen-

trum grauitatis duarum magnitudinum A, C, ſimul. Rurſus quoniam recta BD, coniungit duo centra grauitatis duarum magnitudinum B ſcilicet,& A C, erit compoſitæ A C B, in recta B D centrum grauitatis: eſt autem illud E. Quoniam igitur in quo plano eſt recta BD, in eodem ſunt duo puncta B, E, in quo autem plano eſt recta BD, in eodem eſt recta AC, & puncta A, C; in quo igitur plano ſunt puncta A, C, in eodem erunt puncta B, E; quatuor igitur puncta A, B, C, E, erunt in eodem plano; Quod demonſtrandum erat.

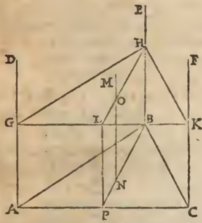


PROPOSITIO XXIX.

Si à cuiuslibet trianguli centro, & tribus angulis quatuor rectæ inter ſe parallelæ plano trianguli inſiſtant: tres autem magnitudines æquales habeant centra grauitatis in ijs tribus, quæ ad angulos; trium magnitudinum ſimul centrum grauitatis erit in ea, quæ ad trianguli centrum terminatur.

Sit triangulum A B C, cuius centrum N, à tribus autem angulis A, B, C, & centro N, inſiſtant plano trianguli

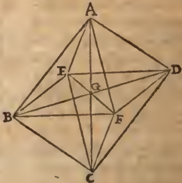
guli A B C, quatuor rectæ inter ſe parallelæ A D, B E, C F, N M, tres autem magnitudines æquales habeant centra grauitatis G, H, K, in tribus A D, B E, C F. Dico trium magnitudinum ſimul, quarum centra grauitatis G, H, K, eſſe in linea N M. Iungantur enim rectæ G H, H K, G K, B N P; & per punctum P, recta P L, ipſi M N, parallela,& iungatur L H. Quoniam igitur rectæ B P, L H, iungunt duas parallelas L P, B H;erunt quatuor rectæ B H, L P, B P, L H, in eodem plano. Et quoniã planum quadranguli P H, ſecat planum trianguli A B C, à communi autem ſectione B P, ſurgunt duæ parallelæ P L,M N; quarum P L, eſt in plano quadranguli P H, erit etiam M N, in eodem plano quadranguli P H: & ſecabit L H. ſecet in puncto O: quare vt L O, ad O H, ita erit P N, ad N B, propter parallelas : ſed P N, eſt dimidia ipſius N B; ergo & L O, eſt dimidia ipſius O H. Eadem ratione,quoniam A P, æqualis eſt P C, erit & G L, æqualis L K. Duarum igitur magnitudinum G, K, ſimul centrum grauitatis erit L: ſed reliquæ magnitudinis, quæ ad H, eſt centrum grauitatis H; & vt compoſitum ex duabus magnitudinibus G, K, ad magnitudinem H, ita ex contraria parte eſt H O, ad O L; Trium igitur magnitudinum G, H, K, ſimul centrum grauitatis erit O, & in linea M N. Quod demonſtrandum erat.



PROPOSITIO XXX.

Omnis octaedri idem eſt centrum grauitatis, & figuræ.

Eſto octaedrum ABCDEF, cuius centrum G. Dico G, eſſe centrum grauitatis octaedri ABCDEF. Ductis enim axibus AC, BD, EF, communis eorum ſectio erit centrum G, in quo axes bifariam ſecabuntur: omnium autem angulorum, qui ad G, bini quique ad verticem ſunt æquales, qui æqualibus altera alteri rectis continentur; ſimilia igitur, & æqualia erunt triangula, nimirum EBG, GDF, & ECG, ipſi GFA, & BCG, ipſi GDA: igitur & BCE, ipſi ADF; pyramis igitur EBCG, ſimilis, & æqualis eſt pyramidi ADFG, quarum latera homologa ſunt indirectum inter ſe conſtituta; duarum igitur pyramidum



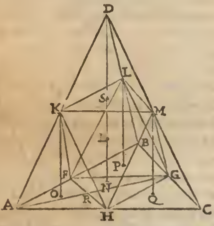
EBCG, ADFG, ſimul centrum grauitatis erit G. Eadem ratione ſex reliquarum pyramidum binis quibuſque oppoſitis ſimul ſumptis centrum grauitatis erit G. Totius igitur octaedri ABCDEF, centrum grauitatis erit G. Quod demonſtrandum erat.

PRO-

PROPOSITIO XXXI.

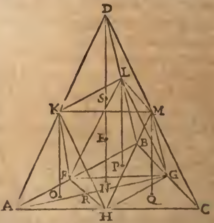
Omnis pyramidis triangulam baſim habentis idem eſt centrum grauitatis,& figuræ.

Sit pyramis A B C D, cuius baſis triangulum A B C, centrum autem E. Dico E, eſſe centrum grauitatis pyramidis A B C D. Secta enim A B C D,pyramide in quatuor pyramides, ſimiles,& æquales inter ſe, & toti pyramidi A B C D,& vnum octaedrum,ſint eæ pyramides D K L M, M G C H, L B G F, A K F H. Octaedrum autem F G H K L M, quod dimidium erit pyramidis A B C D,& ſint axes pyramidum D S N, D S, K O, L P, M Q: & A R G, iungatur. Quoniam igitur F H, eſt parallela ipſi B C, & ſecta eſt B C, bifariam in puncto G, trãſibit recta A G, per centra triangulorũ O, & N,ad quæ axes KO,



D N, terminantur; manifeſtum hoc eſt ex ſuperioribus: eritque dupla A O, ipſius O R, nec non A N, dupla ipſius N G, componendo igitur erit vt A G, ad G N, ita A R, ad R O, & permutando, vt A G, ad A R, ita G N, ad R O: ſed A G, eſt dupla ipſius A R, quoniam & A B, ipſius A F; igitur & G N, erit dupla ipſius R O: ſed & G N, eſt dupla ipſius N R, nam N, eſt centrum trianguli G F H; æqualis eſt igitur N R, ipſi R O, atque hinc dupla N O, ipſius

ipſius O R; ſed & A O erat dupla ipſius O R; æqualis igitur A O erit ipſi O N. quare vt A K, ad K D, ita erit A O, ad O N: igitur in triangulo A D N, erit K O, ipſi D N, parallela. Eadem ratione ſi iungerentur rectæ B H, C F oſtenderemus & duos reliquos axes L P, M Q, eſſe axi D N parallelos: quatuor autem prædicti axes inſiſtunt plano trianguli K L M, ita vt D N tranſeat per centrum S: reliqui autem K O, L P, M Q, terminentur ad angulorum vertices K, L, M, trianguli K L M; igitur ſi tres æquales magnitudines habeant centra grauitatis in axibus K O, L P, M Q; compoſiti ex ijs tribus magnitudinibus in axe D N erit centrũ grauitatis. Rurſus quoniam E ponitur cẽtrũ pyramidis ABCD, erit idem E centrum octaedri F G H K L M, idque in axe D N: eſt autem idem centrũ grauitatis octaedri, & figuræ: centrum igitur E octaedri F G H K L M erit in axe D N. Quod



ſi quatuor reliquæ pyramides dempto prædicto octaedro ſimiliter diuidantur, ac pyramis A B C D diuiſa fuit, erunt rurſus in ſingulis quatuor prædictarum pyramidum ſingula octaedra centrum grauitatis habentia vnumquodque in axe ſuæ pyramidis: quæ pyramides cum ſint inter ſe æquales, earum dimidia octaedra ipſis inſcripta inter ſe erunt æqualia: ſunt autem eorum centra grauitatis in axibus abſciſsarum pyramidum, D S, K O, L P, M Q, axis autem D S: eſt in axe D N; per ea igitur, quæ demon-

monſtrauimus trium octaedrorum, quæ ſunt in pyramidibus A F H K, F B G L, G H O M ſimul, centrum grauitatis erit in axe D K: ſed & octaedri in pyramide D K L M, & octaedri F G H K L M centra grauitatis ſunt in axe D N; omnium igitur quinque octaedrorum, quæ ſunt in tota pyramide A B C D ſimul centrum grauitatis eſt in axe D N. Quod ſi rurſus in ſingulis quatuor prædictarum pyramidum modo dicta ratione quina octaedra deſcripta intelligantur, ſimiliter oſtenſum erit quina octaedra in ſingulis quatuor abſciſſarum pyramidum, velut quatuor magnitudines, centra grauitatis habere in axibus quatuor prædictarum pyramidum: ſunt autem hæc quatuor compoſita ex quinis octaedris inter ſe æqualia, propter æqualitatem octaedrorum multitudine æqualium, quæ æqualibus ſunt pyramidibus ipſorum duplis ordine diuiſionis inter ſe reſpondentibus inſcripta; igitur vt ante, quater quinorum octaedrorum ſimul in axe D N erit centrum grauitatis: ſed & octaedri F G H K L M centrum grauitatis eſt in axe D N; vnius igitur & viginti octaedrorum in pyramide A B C D exiſtentium ex hac ſecunda diuiſione, tanquàm vnius magnitudinis in axe D N erit centrum grauitatis. Ab hoc igitur numero vnius & viginti octaedrorum in pyramide A B C D exiſtentium, ſimili diuiſione illius reliquarum quatuor pyramidum primo abſciſſarum procedentes, & eundem ſemper gyrum, quem fecimus à quinario repetentes, poterunt eſſe in tota A B C D pyramide tot, quemadmodum diximus, deſcripta octaedra, vt eorum numerus ſuperet quemcumque propoſitum numerum, & omnium tanquàm vnius magnitudinis in axe D N ſit centrum grauitatis. Sic autem facienti, & reliquarum pyramidum demptis præcedentibus octaedris, dimidia octaedra ſemper auferenti, tandem relinquentur pyramides minores ſimul ſumptæ quantacumque magnitudine propoſita. Totius igitur pyramidis A B C D

in

in axe D N, erit centrum grauitatis. Eadem ratione in quolibet reliquorum trium axium, pyramidis A B C D, ipſius centrum grauitatis eſſe oſtenderemus; communis igitur ſectio quatuor axium pyramidis A B C D, quod eſt ipſius centrum E, erit centrum grauitatis pyramidis A B C D. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt centrum grauitatis pyramidis triangulam baſim habentis eſſe in eo puncto, in quo axis ſic diuiditur, vt pars quæ ad verticem ſit reliquæ tripla.

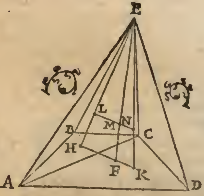
PROPOSITIO XXXII.

Omnis pyramidis baſim pluſquam trilateram habentis centrum grauitatis axim ita diuidit, vt pars, quæ eſt ad verticem ſit tripla reliquæ.

Sit pyramis A B C D E, cui vertex E, baſis autem quadrilatera A B C D, & eſto axis E F, ſegmentum E M, reliqui M F, triplum. Dico punctum M, eſſe centrum grauitatis pyramidis A B C D E. Ducta enim A C, ſit trianguli A B C, centrum grauitatis H, ſicut & K, trianguli A C D: & iungantur K H, H E, E K: Factaque vt E M, ad M F, ita E L ad L H, & E N ad N K, iungatur L N. Quoniam igitur E F eſt axis pyramidis A B C D E, erit baſis A B C D centrum grauitatis F.

Rurſus

Rurſus quia puncta K, H, ſunt centra grauitatis triangulorum A B C, C D A, erunt E H, E K, axes pyramidum A B C E, A C D A: quorum E L, eſt tripla ipſius L H, nec non E N, tripla ipſius E K; pyramidis igitur A B C E, centrum grauitatis erit L, ſicut & K, pyramidis A C D E. Rurſus, quoniam totius quadrilateri A B C D, eſt centrum grauitatis F, cuius magnitudinis partium triangulorum A B C, C D A, centra grauitatis ſunt K, H; recta K H, à puncto F, ſic diuiditur, vt ſit H F, ad F K, vt triangulum A C D, ad triangulum A B C, hoc eſt, vt pyramis A C D E, ad pyramidem A B C E. ſed vt H F, ad F K, ita eſt L M, ad M N; vt igitur eſt pyramis A C D E, ad pyramidem A B C E, ita erit L M, ad M N. Sed N, eſt centrum grauitatis pyramidis A C D E, & L pyramidis A B C E; punctum igitur M, erit centrum grauitatis pyramidis A B C D E.



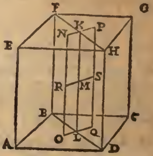
Quod ſi pyramis habeat baſim quinquelateram; poſito rurſus axe totius pyramidis, & baſi ſecta in triangulum, & quadrilaterum, poſitis vtriuſque proprijs centris grauitatis, eadem demonſtratione propoſitum concludetur. Quemadmodum ſi baſis ſit ſex laterum, ſecta ea in quinque laterum, & triangulum, & reliquis vt antea poſitis: & ſic ſemper deinceps. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

FG, GH, homologa ſunt lateribus GO, ON. nam dupla eſt FG, ipſius GO, & GH, ipſius ON; angulus igitur OGN, æqualis erit angulo GFH; parallela igitur GN, ipſi FH, & propter ſimilitudinem triangulorum dupla erit FH, ipſius GN. Rurſus, quoniam recta OP, ſecat latera oppoſita parallelogrammi BD, bifariam in punctis O, P, ſecta,& ipſa bifariam in puncto N, erit punctum N, parallelogrammi BD, centrum grauitatis, atque ideo axis FN, pyramidis ABDEF. qua ratione erit quoque axis FH, pyramidis ABCF: ſed FL, eſt tripla ipſius LH; pyramidis igitur ABCF, centrum grauitatis erit L. Rurſus quia eſt vt GK, ad KH, ita GR, ad LH, propter ſimilitudinem triangulorum, erit æqualis GR, ipſi LH: ſed eſt FH, quadrupla ipſius LH, quadrupla igitur FH, ipſius GR: ſed FH erat dupla ipſius GN; quadrupla igitur FH, reliquæ NR, ac proinde GR, RN, æquales erunt: recta igitur FL, tripla erit vtriuſque ipſarum GR, RN, ſed vt FL, ad NR, ita eſt FM, ad MN, propter ſimilitudinem triangulorum; recta igitur FM, erit ipſius MN, tripla, ſicut & LM, ipſius MR: ſed quia KH, eſt æqualis GK, erit & LK, æqualis RK; propter ſimilitudinem triangulorum; cum igitur LK, ſit tripla ipſius MR, erit LK, ipſius KM, dupla; vt igitur eſt pyramis ABEDF, ad pyramidem ABCF, ita erit LK, ad KM; eſt autem M, centrum grauitatis pyramidis ABED, ſicut & L, pyramidis ABCF; totius igitur priſmatis ABCDEF, centrum grauitatis erit K. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXIV.

Omnis priſmatis baſim pluſquam trilateram habentis centrum grauitatis eſt in medio axis.

Sit priſma ABCDEFGH, baſim habens quadrilateram ABCD: axis autem KL, bifariam ſectus in puncto M. Dico punctum M, eſſe centrum grauitatis priſmatis ABCDEFGH. Iungantur enim rectæ BD, FH, vt parallelogrammum ſit BH, ſectumque totum priſma in duo priſmata, quorum baſes ſunt triangula, in quæ ſecta ſunt quadrilatera AC, EG, ſint autem axes duorum priſmatum triangulas baſes habentium NO, PQ. Erunt igitur centra grauitatis O, trianguli ABD, & L, quadrilateri AC, & Q, trianguli BCD, itemque N, trianguli EFH, & K, quadrilateri EG, & P, trianguli FGH: iunctæ igitur OQ, NP, per puncta L, K, tranſibunt: cumque tres prædicti axes ſint lateribus priſmatis, atque ideo inter ſe quoque paralleli; parallelogramma erunt OP, NL, LP. ducta igitur per punctum M, ipſi OQ, vel NP, parallela RS, erit vt NK, ad KP, ita RM, ad MS: & vt KM, ad ML, ita NR, ad RO, & PS, ad SQ: ſed KM, eſt æqualis ML; igitur & KR, ipſi RO, & PS, ipſi SQ, æqualis erit: ſunt autem hæ ſegmenta axium NO, PQ; punctum igitur R, eſt centrum grauitatis priſmatis ABDEFH: & per



punctum

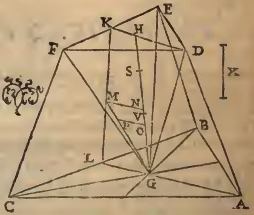
punctum S, priſmatis BCDFGH. Quoniam igitur quadrilateri EG, eſt centrum grauitatis K, cuius duorum triangulorum centra grauitatis ſunt P, N; erit vt triangulum FGH, ad triangulum EFH, hoc eſt vt priſma BCDFGH, ad priſma ABDEFH, ita NK, ad KP, hoc eſt RM, ad MS; cum igitur ſit R, centrum grauitatis priſmatis ABDEFH: ſicut & S, priſmatis BCDFGH; totius priſmatis ABCDEFGH, centrum grauitatis erit M. Quod ſi priſma baſim habeat quinquelateram; abſciſſo rurſus priſmate vno triangulam baſim habente, ſumptiſque axibus priſmatum, quorum alterum habebit baſim quadrilateram, eadem demonſtratione propoſitum concluderemus, & ſic deinceps in aliis. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XXXV.

Omnis fruſti pyramidis triangulam baſim habentis centrum grauitatis eſt in axe, primum ita diuiſo, vt ſegmentum attingens minorem baſim ſit ad reliquum, vt duplum vnius laterum maioris baſis vna cum latere homologo minoris, ad duplum prædicti lateris minoris baſis, vna cum latere homologo maioris. Deinde à puncto ſectionis abſciſſa quarta parte ſegmenti, quod maiorem baſim attingit, & à puncto, in quo ad minorem baſim axis terminatur ſumpta item quarta parte totius axis; in eo puncto, in quo ſegmentum axis duabus poſterioribus ſectionibus finitum ſic diuiditur, vt ſeg-

ſegmentum eius maiori baſi propinquius ſit ad totum prædictum interiectum ſegmentum, vt tertia proportionalis minor ad duo latera homologa baſium oppoſitarum, ad compoſitam ex his tribus deinceps proportionalibus.

Sit pyramidis fruſtum, cuius baſes oppoſitæ,& parallelæ, maior triangulum A B C, minor autem triangulum D E F, axis autem G H. triangulorum autem A B C, D E F,quæ inter ſe ſimilia eſse neceſse eſt, ſint duo latera homologa B C,E F:& vt eſt B C, ad E F, ita ſit E F, ad X: vt autem eſt duplum lateris B C, vna cum latere E F, ad duplum lateris E F, vna cum latere B C, ita ſit H N, ad N G, & N O,pars quarta ipſius N G, & H S, pars quarta ipſius G H; ipſius autem S O, ſit V O, ad O S, vt eſt X,ad compoſitam ex tribus B C,E F, X. Dico punctum V (quod cadet neceſsario infra punctum N, quanquam hoc ad demonſtrationem nihil refert) eſse centrum grauitatis fruſti A B C D E F. Ducta enim recta A G L; quoniam G H, eſt axis fruſti A B C D E F, & punctum G, centrum grauitatis trianguli A B C, erit punctum L, in medio baſis B C: ſecto igitur etiam latere E F, bifariam in puncto K, iungantur L K, K H: & vt

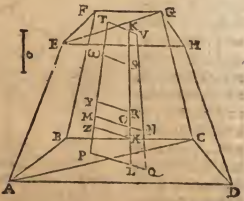


eſt

vt eſt H N, ad N G, ita fiat K M, ad M L, & G M, iungatur: & vt eſt G O, ad O N, ita fiat G P, ad P M, & iungantur M N, O P, F G, G D, G E. Quoniam igitur recta K L, ſecat trapezij B C F E, latera parallela bifariam in punctis K, L, & eſt vt H N, ad N G, hoc eſt vt duplum lateris B C, vna cum latere E F, ad duplum lateris E F, vna cum latere B C, ita K M, ad M L; erit punctum M, centrum grauitatis trapezij B C F E, & pyramidis G B C F E, axis G M. Et quoniam vt G O, ad O N, ita eſt G P, ad P M, atque ideo G P, tripla ipſius P M, erit punctum P, centrum grauitatis pyramidis G B C F E, atque ideo in linea O P. Rurſus quoniam angulus A C B; æqualis eſt angulo D F K: & vt A C, ad C K, ita eſt D F, ad F K: eſt autem D F, parallela ipſi A C, & F K, ipſi C L; erit reliqua D K, reliquæ A L, parallela; vnum igitur planum eſt, A D K L, in quo iacet triangulum G M N; cum igitur ſit parallela K H, ipſi G L, vtque H N, ad N G, ita K M, ad M L; erit M N, ipſi L G, parallela: ſed O P, eſt parallela ipſi M N; ſecant enim latera trianguli G M N, in eaſdem rationes; igitur O P, erit L G, parallela. Similiter ex puncto O, ad axes duarum pyramidum G A B E D, G A C F D, duæ aliæ rectæ lineæ ducerentnr, quas & centra grauitatis pyramidum habere, & parallelas rectis G Q, G R, alteram alteri eſse oſtenderemus, ſicut oſtendimus O P, habentem centrum grauitatis pyramidis G B C F E, ipſi G L, parallelam; ſed tres rectæ G L, G Q, G R, ſunt in eodem plano trianguli nimirum A B C; tres igitur prædictæ parallelæ, quæ ex puncto O, atque ideo trium prædictarum pyramidum centra grauitatis erunt in eodem plano, per punctum O, & trianguli A B C, parallelo. Quoniam igitur fruſti A B C D E, centrum grauitatis eſt in axe G H; (manifeſtum hoc autem ex duobus centris grauitatis pyramidis, cuius eſt prædictum fruſtum, & ablatæ, quæ centra grauitatis ſunt in axe, cuius ſegmentum eſt axis

G H)

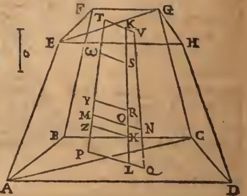
Sit pyramidis quadrilateram baſim habentis fruſtum A B C D E F G H, cuius axis K L, atque in ipſo centrum grauitatis O. Dico axim K L, ſectum eſse in puncto O, vt propoſuimus. Ductis enim A C, E G, quæ ſimilium ſectionum angulos æquales ſubtendant B, F, qui lateribus homologis continentur, fruſta erunt pyramidum triangulas baſes habentium A F G, A G H: ſit autem fruſti A F G, axis T P, & in eo eiuſdem fruſti centrum grauitatis M, & fruſti A G H, axis V Q, & in eo centrum grauitatis N, & iungantur T V, M N, P Q. Quoniam igitur eſt pyramidis fruſtum, quod proponitur; omnia



eius producta latera concurrent in vno puncto, qui eſt pyramidis vertex: fruſta igitur, in quæ diuiſum eſt fruſtum propoſitum earum ſunt pyramidum, quæ verticem habent communem cum pyramide, cuius eſt fruſtum propoſitum: tres igitur talium fruſtorum axes, vt pote ſegmenta axium trium prædictarum pyramidum in communi illo vertice concurrent: quilibet igitur duo trium prædictorum axium K L, T P, V Q, erunt in eodem plano: T P, igitur, & V Q, ſunt in eodem plano. Eadem autem ratione, qua vtebamur de priſmate K, centrum grauitatis K, baſis E H, eſt in linea T V, & L, baſis B D, centrum grauitatis eſt in linea P Q; reliquæ igitur K L, M N, erunt in eodem plano trapezij P T V Q, ſeque mutuo ſecabunt: cum

K igitur

igitur M, N, ſint centra grauitatis propoſiti priſmatis partium priſmatum A F G, A G H, atque ob id O, totius priſmatis A F G H, in linea M N, centrum grauitatis; per punctum O, recta M N, tranſibit. Et quoniam planum trapezij P V, ſecatur duobus planis parallelis, erunt T V, P Q, ſectiones parallelæ. His demonſtratis, fiat rurſus vt A B, bis vna cum E F, ad E F, bis vna cum A B, ita T Y, ad Y P: & ſumatur T ω, pars quarta ipſius T P, & Y Z, pars quarta ipſius P Y, & ad axim K L, ducantur ipſis T V, P Q, parallelæ ω S, Y R, Z X, quæ rectas T P, K L, ſecabunt in eaſdẽ rationes: vt igitur T Y, ad Y P, hoc eſt vt A B, bis vna cum E F, ad E F bis vna cum A B, ita erit K R, ad R L, eritque K S, pars quarta ipſius K L, qualis & R X, ipſius R L.



Et quoniam M, eſt centrum grauitatis fruſti A F G; manifeſtum eſt ex tribus prædictis axis T P, ſectionibus Y, ω, Z, eſse M Z, ad Z ω, hoc eſt O X, ad X S, vt eſt 6 ad compoſitam ex tribus deinceps proportionalibus A B, E F, 6; Fruſti igitur A B C D E F G H, centrum grauitatis O, axim K L, ita diuidit, vt propoſuimus. Quod ſi fruſtum propoſitum ſit pyramidis baſim habentis quinquelateram, & quotcumque plurium deinceps fuerit laterum, eadem demonſtratione ſemper deinceps, vt in priſmate monuimus, propoſitum concluderemus.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

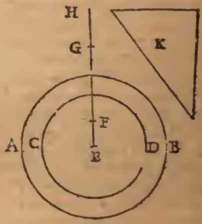
Dodecaedri, & icoſaedri idem eſt centrum grauitatis, & figuræ.

Nam huiuſmodi figuras habere axes, qui omnes ſe ſe bifariam ſecant;(tale autem ſectionis punctum centrum eſt) conſtat ex talium corporum in ſphæra inſcriptione in decimotertio Euclidis Elemento: nec non omnem pyramidem, cuius vertex eſt dodecaedri, vel octaedri centrum idem cum centro ſphæræ, vt conſtat ex ijſdem Euclidis inſcriptionibus; baſis autem triangulum æquilaterum, vel pentagonum, vna ex baſibus corporum prædictorum, habere pyramidem oppoſitam ſimilem ipſi, & æqualem, cuius latera eius lateribus homologis ſunt in directum poſita, baſis autem triangulum, vel pentagonum, quale diximus; Eadem igitur ratione, qua vſi ſumus ad demonſtrandum centrum grauitatis, & parallelepipedi, & octaedri, propoſitum concluderemus.

PROPOSITIO XXXVIII.

Data qualibet figura, cuius termini omnis cauitas ſit interior, ſi certum in ea punctum talis eius partis centrum grauitatis eſse poſsit, quæ ab ea deficiat minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita; illud erit totius figuræ centrum grauitatis.

Eſto figura A B, cuius termini omnis cauitas ſit interior & certum in ea punctum E, talis partis A B, figuræ qualem diximus centrum grauitatis eſse poſsit. Dico punctum E, eſse figuræ A B, centrum grauitatis. Si enim E, non eſt, erit aliud, eſto F: & iuncta E F producatur, & ſumatur in illa extra figuræ A B, terminum, quodlibet punctum G; & vt eſt F E, ad E G, ita ſit alia magnitudo K, ad figuram A B, & ex vi hypotheſis ſit pars quædam C D, figuræ A B, cuius centrum grauitatis E, talis vt ablata relinquat A C, minus magnitudine K. Minor igitur proportio erit A C, ad A B, quàm K, ad A B, hoc eſt quàm F E, ad E G; fiat vt A C, ad A B, ita E F, ad F G H: ſed F, eſt centrum grauitatis totius A B, & E, vnius partis C D; reliquæ igitur



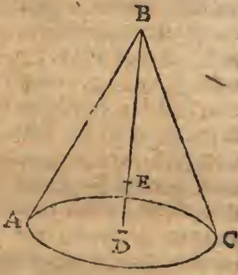
partis A C, centrum grauitatis erit H, vltra punctum G: ſed G, cadit extra terminum figuræ A C; multo igitur magis H: Quod eſt abſurdum. Non igitur aliud punctum à puncto E; punctum igitur E, figuræ A B, erit centrum grauitatis. Quod demonſtrandum erat.

PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

Omnis coni centrum grauitatis axim ita diuidit, vt ſegmentum ad verticem ſit reliqui triplum.

Sit conus A B C, cuius vertex B, axis autem B D, cuius B E, ſit tripla ipſius E D. Dico punctum E, eſse coni A B C, centrum grauitatis. Si enim cono A B C, pyramis inſcribatur, cuius baſis inſcripta circulo A C, æquilatera ſit, & æquiangula, eius centrum grauitatis erit idem quod & figuræ centrum, ſed centrum talis figuræ circulo inſcriptæ idem eſt, quod centrum circuli, vt colligitur ex demonſtrationibus quarti Elementorum; inſcriptæ igitur pyramidis erit axis B D, & centrum grauitatis E. talis autem ea pyramis inſcribi poteſt, vt à cono deficiat minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita; igitur A B C, coni centrum grauitatis erit E. Quod demonſtrandum erat.

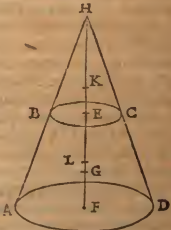


PROPOSITIO XXXX.

Omnis fruſti conici centrum grauitatis idem eſt in axe centro grauitatis fruſti pyramidis baſim habentis æquilateram, & æquiangulam inſcriptæ cono, abſciſſi eodem plano, quo coni fruſtum.

Sit

Sit coni fruſtum A B C D, cuius axis E F, fruſto autem A B C D, intelligatur inſcriptum fruſtum pyramidis inſcriptæ cono A H D, à quo abſciſſum eſt fruſtum A B C D, baſim habentis æquilateram, & æquiangulam inſcriptam circulo A D: quare eius centrum grauitatis, & figuræ erit punctum F, vt diximus in præcedenti, axis autem F H, ſicut etiam pyramidis abſciſſæ vna cum cono B H C, axis E H, quare & reliqui fruſti pyramidis axis erit E F, igitur in E F, ſit fruſti inſcripti fruſto A B C D, centrum grauitatis G. Dico punctum G, eſse centrum grauitatis fruſti A B C D. Ponatur enim F L, pars quarta ipſius F H, necnon E K, pars quarta ipſius E H: punctum igitur K, eſt centrum grauitatis pyramidis, & coni B H C, ſicut & punctum L, pyramidis, & coni A H D. cum igitur fruſti pyramidis fruſto ABCD, inſcripti ſit centrum grauitatis G; erit vt G L, ad L K, ita pyramis B H C, ad pyramidis fruſtum fruſto ABCD, inſcriptum: ſed vt pyramis B H C, ad pyramidis fruſtum fruſto A B C D, inſcriptum,



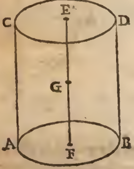
ita eſt diuidendo, conus B H C, ad fruſtum A B C D, propter eandem triplicatam communium conis, & pyramidibus ſimilibus laterum homologorum proportionem; vt igitur G L, ad L K, ita erit conus B H C: ad fruſtum ABCD: ſed coni B H C, centrum grauitatis erat K, & coni A H D, centrum grauitatis L; fruſti igitur A B C D, centrum granitatis erit G. Quod demonſtrandum erat.

PRO-

PROPOSITIO XLI.

Omnis cylindri centrum grauitatis axim bifariam diuidit.

Sit cylindrus A B C D, cuius axis E F, & ſit ſectus bifariam in puncto G. Dico punctum G, eſse centrum grauitatis cylindri A B C D. Nam ſi cylindro A D, inſcriptum intelligatur priſma, cuius baſes oppoſitæ æquilateræ ſint,& æquiangulæ; erunt, qua ratione ſupra diximus,earum centra figuræ,& grauitatis E, F; axis igitur inſcripti priſmatis erit E F: & centrum grauitatis G. poteſt autem tale priſma ſic inſcribi cylindro A B C D, vt ab illo deficiat minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita; cylindri igitur A B C D, centrum grauitatis erit G. Quod demonſtrandum erat.

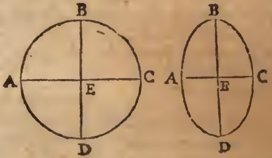


PROPOSITIO XLII.

Sphæræ, & ſphæroidis idem eſt centrum grauitatis,& figuræ.

Sit ſphæra, vel ſphæroides A B C D, cuius centrum E, Dico

Dico ſphæræ, vel ſphæroidis A B C D, centrum grauitatis eſse E. Sint enim bini axes ſphæræ, vel ſphæroidis inter ſe ad rectos angulos; & in ſphæroide ſit maior diameter B D, minor A C, per binos autem hos axes plana tranſeuntia ad eos axes erecta, ſecent ſphæram, vel ſphæroidem. Qua ratione axes dimidij erunt axes hemiſphærij, vel hemiſphæroidis: hemiſphærium autem, & ſphæroidis eſt fi-



gura circa axim in alteram partem deficiens, qualium omnium figurarum centrum grauitatis eſt in axe; igitur hemiſphærij, vel hemiſphæroidis A B C D, centrum grauitatis eſt in axi B E, ſicut & reliqui A D A, in axi E D; totius igitur ſphæræ, vel ſphæroidis A B C D centrum grauitatis eſt in axi B D. Eadem ratione & in axi A C; in communi igitur ſectione centro E. Quod demonſtrandum erat.

PRIMI LIBRI FINIS.

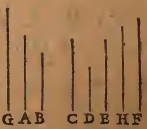
LVCAE VALERII DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM

LIBER SECVNDVS.

PROPOSITIO I.

SI duæ magnitudines vnà maiores, vel minores prima, & tertia minori exceſſu, vel defectu quantacumq; magnitudine propoſita eiuſdem generis cum illa, ad quam refertur, eandem proportionē habuerint, maior vel minor prima ad ſecundam, & vnà maior, vel minor tertia ad quartam; erit vt prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam.

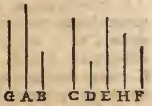
Sint quatuor magnitudines A prima, B ſecunda, C tertia,& D quarta:quantacumque autem magnitudine propoſita, ex infinitis quæ proponi poſſunt eiuſdem generis cum A, C, vel vna tantum, ſi A C ſint eiuſdem generis: vel vna,& altera;ſi vna vnius,altera ſit alterius generis;ſemper aliæ duæ magnitudines vnà maiores, quàm A C, minori exceſſu magnitudine propoſita;eandem habeant proportionem,maior quàm A ad B, & maior quàm C ad D. Dico eſſe vt A ad B, ita C ad D. Poſita enim E ad D, vt A ad B, & F maiori quàmC vtcumque,ſint aliæ duæ magnitudines,G maior quàmA minori exceſſu magnitudine eiuſdem generis cum A, quam quis voluerit, & H maior quàm C minori exceſſu quàm quo F ſuperat C, ideſt,quæ maior ſit quàm C, & minor quàm F: ſit autem vt G ad B, ita H ad D. Quoniam igitur F maior eſt, q̃ H, maior erit proportio ipſius F quàm H ad D, hoc eſt quàm G ad B. Sed cũ G maior ſit quàm A,maior eſt proportio G ad B, quàm A ad B, multo igitur erit maior proportio F ad D, quàm A ad B. Sed F ponitur maior quàm C,vtcumque; nulla igitur magnitudo maior quàm C eſt ad D, vt A ad B:, ſed E ad D, eſt vt A ad B; non igitur eſt E maior quàm C; nec maior proportio E ad D, hoc eſt A ad B, quàm C ad D. Eadem autem ratione nec maior erit proportio C ad D quàm A ad B, hoc eſt non minor A ad B, quàm C ad D; eadem igitur proportio A ad B, quæ C ad D.



Sed aliæ duæ magnitudines vnà minores quàm A, C minori defectu quantacumque magnitudine propoſita, eandem habeant proportionem, minor quàm A ad B, & minor quàm C, ad D. Dico eſſe vt A ad B, ita C ad D.

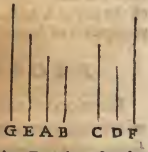
Poſita

Poſita enim rurſus E ad D, vt A ad B, & F minori quàm C vtcumque, ſit G minor quam A, minori defectu magnitudine eiuſdem generis cum A, quam quis voluerit, & H minor quàm C, & maior quàm F: ſit autem vt G ad B, ita H ad D. Quoniam igitur F minor eſt quàm H, minor erit proportio ipſius F quã H ad D, hoc eſt q̃ G ad B: ſed cum G ſit minor q̃ A, minor eſt proportio G ad B, quàm A ad B; multo ergo minor proportio F ad D, quàm A ad B: ſed F ponitur minor quàm C vtcumque; nulla igitur magnitudo minor quàm C eſt ad D, vt A ad B: ſed E eſt ad D, vt A ad B; non igitur eſt E minor quàm C, nec minor proportio E ad D, hoc eſt A ad B, quàm C ad D. eadem autem ratione non minor erit proportio C ad D, quàm A ad B; hoc eſt non maior A ad B, quàm C ad D; vt igitur A ad B, ita eſt C ad D. Quod demonſtrandum erat.



ALITER.

Dico eſse vt A ad B, ita C ad D. Si enim fieri poteſt, ſit minor proportio A ad B, quàm C ad D. alia igitur aliqua magnitudo G maior quàm A, eandem habebit proportionem ad B, quam C ad D. Sit autem F maior quam C minori exceſsu magnitudine, quã quis voluerit, & E maior quàm A, & minor quàm G: vt autem E ad B, ita F ad D. Quoniam igitur F maior eſt quàm C, maior erit proportio F ad D, quàm C ad D. Sed vt F ad D, ità eſt E ad B: & vt C ad D, ita G ad B; maior



igitur proportio E ad B, quàm G ad B; quamobrem E maior erit quàm G minor maiori, quod fieri non poteſt. Non igitur minor eſt proportio A ad B quàm C ad D. Eadem autem ratione non minor erit proportio C ad D, quàm A ad B, hoc eſt non maior A ad B, quàm C ad D; eadem igitur proportio A ad B, quæ C ad D.

In ſecunda autem hypotheſis parte, quæ pertinet ad minorem defectũ, eſto ſi fieri poteſt maior proportio A ad B, quàm C ad D. erit igitur, & ſit aliqua alia magnitudo G minor quàm A ad B, vt C ad D. Sit autẽ F minor quàm C minori defectu magnitudine, quam quis voluerit, & E minor quàm A, & maior quàm G, vt autem E ad B ita F ad D. Quoniam igitur maior eſt proportio C ad D, quàm F ad D: ſed vt C ad D, ita eſt G ad B: & vt F ad D, ita E ad B: maior erit proportio G ad B quàm E ad B; quamobrem erit G maior quàm E, minor maiori, quod fieri non poteſt; non igitur maior eſt proportio A ad B, quàm C ad D. Eadem autem ratione non maior erit proportio C ad D, quàm A ad B, hoc eſt non minor A ad B, quàm C ad D. Eadem igitur erit proportio A ad B, quæ C ad D. Quod demonſtrãdum erat.

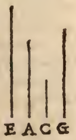


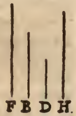
PROPOSITIO II.

Si maior, vel minor prima ad vnã maiorem, vel minorem ſecunda, minori vtriuſq; exceſſu, vel defectu quantacumq; magnitudine propoſita fuerit vt tertia ad quartam; erit vt prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam.

Sint

Sint quatuor magnitudines, A prima, B ſecunda, C tertia, & D quarta: & aliæ duæ magnitudines E F vnà maiores quàm A, B minori exceſsu quantacumque magnitudine propoſita eiuſdem generis cum ipſis A, B. Sit autem E maior quàm A, ad F maiorem quàm B, vt C ad D. Dico eſse A ad B, vt C ad D. Eſto enim, quod fieri poteſt, alia magnitudo G eiuſdem generis cum E F ad aliam H, vt C ad D, vel E ad F. Quoniam igitur eſt permutando vt E ad G, ita F ad H, & ſunt E F vnà maiores quàm A B minori exceſsu quantacumque magnitudine propoſita; erit per antecedentem, vt A ad G, ita B ad H: & permutando A ad B, vt G ad H, hoc eſt vt C ad D. Idem autem ſimiliter oſtenderemus poſitis E F minoribus quàm A B, & proportionalibus vt dictũ eſt. Manifeſtũ eſt igitur propoſitũ.





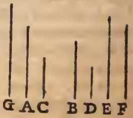
ALITER.

Ijſdem poſitis, ſi non eſt A ad B, vt C ad D; vel igitur maior vel minor erit proportio A ad B quàm C ad D: ſit autem maior: vt igitur A ad B, ita erit eadem A ad aliã maiorem q̃ B. Eſto illa E. ſintque aliæ duæ magnitudines, G maior quàm A minori exceſsu magnitudine eiuſdem generis cum A, quam quis voluerit, & F maior quàm B, & minor quàm E. ſit autem G ad F vt C ad D. Quoniam igitur & vt C ad D, ita eſt A ad E; erit vt G ad F, ita A ad E; & permutando vt G ad A, ita F ad E: ſed G eſt maior



quàm

quàm A: ergo & F maior quàm E, minor maiori, quod eſt abſurdum. Non igitur maior eſt proportio A ad B quàm C ad D: eadem autem ratione non maior erit proportio B ad A quã D ad C, hoc eſt non minor A ad B, quàm C ad D; eſt igitur A ad B, vt C ad D.



Rurſus in ſecunda parte hypotheſis, quæ attinet ad minorem defectum: ſi non eſt A ad B vt C ad D; eſto, ſi fieri poteſt, minor proportio A ad B quàm C ad D. igitur A ad aliam quam B minorem eandem habebit proportionẽ, quam C ad D, eſto illa E: ſintque aliæ duæ magnitudines, G minor quàm A minori defectu magnitudine eiuſdem generis cum A, quam quis voluerit, & F minor quàm B, & maior quàm E: ſit autem G ad F, vt C ad D, hoc eſt vt A ad E. Quoniam igitur permutando eſt vt G ad A, ita F ad E, & G eſt minor quàm A; erit & F minor quàm E, maior minori, quod eſt abſurdum; non igitur minor eſt proportio A ad B quàm C ad D: eadem autem ratione non minor erit proportio B ad A, quàm D ad C, hoc eſt non maior A ad B, quàm C ad D; eſt igitur A ad B vt C ad D. Quod demonſtrandum erat.

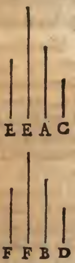


PROPOSITIO III.

Si maior, vel minor prima ad vnà maiorem vel minorem ſecunda, minori exceſſu, vel defectu quan-

quantacumque magnitudine propoſita, nominatam habuerit proportionem; prima ad ſecundam eandem nominatam habebit proportionem.

Sint duæ magnitudines A, B duarum autem aliarum E F vnà maiorum, vel minorum quàm A B minori exceſsu vel defectu quantacumque magnitudine propoſita, habeat E maior vel minor quàm A ad F vnà maiorem, vel minorem quàm B certam aliquam nominatam proportionem, verbi gratia, ſeſquialteram. Dico A ad B, eandem nominatam habere proportionem: vt A ipſius B eſse ſeſquialteram. Quoniam enim omnis proportio in aliquibus magnitudinibus conſiſtit; ſit magnitudo C ipſius D ſeſquialtera: ſed & E eſt ipſius F ſeſquialtera; vt igitur C, tertia ad D quartam, ita erit E maior, vel minor quàm A prima, ad F vnà maiorem, vel minorem ſecunda, minori, vt ponitur, vtriuſque exceſsu, vel defectu magnitudine propoſita eiuſdem generis cum A, B, quæcumque illa, & quantacumque ſit; erit per præcedentem eadem proportio A ad B, quæ C ad D: ſed proportio quam habet C ad D, eſt ſeſquialtera; ergo & A ipſius B erit ſeſquialtera. Similiter quocumque alio nomine notatam proportionem habeat E ad F, eandem habere A ad B, oſtenderemus, vt duplam, ſeſquitertiam, alicuius duplicatam, vel triplicatam, & ſic de ſingulis. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.



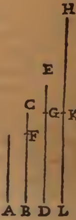
Hæc autem propoſitio in paucis exemplaribus, quæ dono quibuſdam dederã, non extat; poſterius enim eam excogitaui

giraui,quo ſecunda antecedẽs hic in illis tertia facilius ſeruiret ijs,in quibus certæ proportionis nomen, tertiũ & quartum terminum ſubobſcurè indicat, vt in ſequenti XII illud, proportio dupla. Illo autem Lemmate,quod prima propoſitio inſcribebatur,nunc ita non egeo,vt primam, & ſecundã, quæ ſecunda,& tertia erant,& facilius demonſtrem, & earum ſenſum paucioribus comprehendam. priora ergo ita non improbo vt hæc ijs anteponam.

PROPOSITIO IIII.

Si ſint tres magnitudines ſe ſe æqualiter excedentes, minor erit proportio minimæ ad mediam quàm mediæ ad maximam.

Sint tres magnitudines inæquales A, B C, D E, quarum B C æquè excedat ipſam A, ac D E ipſam B C Dico minorem eſse proportionem A, ad B C, quàm B C, ad D E. Nam vt eſt A ad B C, ita ſit B C ad L H, & auferatur B F æqualis A, & D G, & L K æquales B C. Quoniam igitur eſt vt A, hoc eſt F B ad B C, ita B C hoc eſt K L ad L H; erit diuidendo vt B F ad F C, ita L K ad K H: & componendo,ac permutando vt B C ad L H, ita F C ad K H. ſed B C eſt minor quàm L H; ergo & F C hoc eſt E G erit minor quàm K H. Sed D E, L H, ſuperant B C exceſsibus E G, K H; minor igitur erit D E quàm L H, & minor proportio B C ad L H, quàm B C ad D E. Sed vt B C ad L H, ita eſt A ad B C; minor igitur proportio erit A ad B C, quàm B C ad D E. Quod demonſtrandum erat.



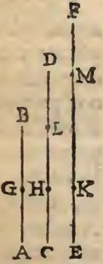
PRO-

85

PROPOSITIO V.

Si ſit minor proportio primæ ad ſecundam, quàm ſecundæ ad tertiam, ab ipſis autem æquales auferantur; erit minor proportio reliquæ primæ ad reliquam ſecundæ, quam reliquæ ſecundæ ad reliquam tertiæ.

Sit minor proportio A B, ad C D, quam C D, ad E F. Sitque A B, minima. ablatæ autem æquales ſint A G, C H, E K. Dico reliquarum minorem eſſe proportionem B G, ad D H, quam B H, ad F H. Ponatur enim C L, æqualis A B, & E M, æqualis C D. Quoniam igitur maior eſt proportio D L ad L H, quam D L, ad L C; erit componendo maior proportio D H ad H L, quam D C ad C L. hoc eſt, maior proportio D H, ad B G, quam D C, ad A B: & conuertendo, minor proportio B G ad D H, quam A B, ad C D: hoc eſt maior proportio A B, ad C D, quam B G, ad D H. Rurſus, quoniam maior eſt proportio C D, ad E F, quam A B, ad C D: hoc eſt quam C L, ad E M; erit permutando, maior proportio C D, ad C L, quam F E, ad E M: & diuidendo, maior D L, ad L C, quam F M, ad M E: & permutando, maior D L, ad F M, quam C L, ad E M: hoc eſt quam A B, ad C D. Sed maior erat proportio A B, ad C D, quam B G ad D H; multo igitur maior proportio erit D L, ad F M, quam B G, ad D H: hoc eſt quam L H, ad M K: & permutando, maior proportio D L, ad L H, quam F M, ad M K: & componendo, maior D H, ad H L, quam F K,



ad K M: & permutando, maior D H ad F K, quam L H, ad M K: hoc eſt, quam B G, ad D H: hoc eſt minor proportio B G ad D H, quam D H, ad F K. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VI.

Si ſint tres magnitudines inæquales, & aliæ illis multitudine æquales binæque in duplicata primarum proportione. Sit autem minor proportio primæ ad ſecundam, quam ſecundæ ad tertiam in primis; erit minor proportio primæ ad ſecundam, quam ſecundæ ad tertiam in ſecundis.

Sint tres magnitudines A, B, C, & aliæ illis multitudine æquales D, E, F. quarum ipſius D ad E proportio ſit duplicata eius, quæ eſt A ad B: & E ad F, duplicata eius, quæ eſt B ad C. ſit autem minor proportio A ad B, quam B ad C. Dico minorem eſſe proportionem D ad E, quam E ad F. Sit enim vt C ad B, ita B ad G: & vt B ad A, ita A ad H. Igitur G ad C duplicata erit proportio ipſius G ad B, hoc eſt B ad C: ſimiliter erit H ad B, duplicata proportio ipſius A ad B. Vt igitur eſt H ad B, ita erit D ad E: & vt G ad C, ita E ad F. Rurſus, quia minor eſt proportio A ad B, quam B ad C, ſed vt A ad B, ita eſt H ad A

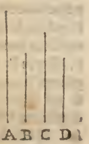


& vt

& vt B ad C, ita G ad B; erit ex æquali minor proportio H ad B, quam G ad C, ſed vt H ad B, ita erat D, ad E: & vt G ad C, ita E ad F; minor igitur proportio erit D ad E, quam E ad F. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VII.

Si ſint octo magnitudines quaternæ proportionales: tertiæ autem vtriuſque ordinis inter ſe ſint vt primæ; erit vt compoſita ex primis ad compoſitam ex ſecundis, ita compoſita ex tertiis ad compoſitam ex quartis.



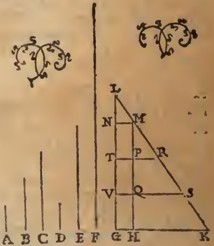


Sint octo magnitudines quaternæ ſumptæ proportionales, vt A ad B, ita C ad D. & vt E ad F, ita G ad H. ſit autem vt A ad E, ita C ad G. Dico eſse vt A E, ad A B F, ita C G, ad D H. Quoniam enim componendo eſt vt A E, ad E, ita C G, ad G; ſed vt E ad F, ita eſt G, ad H; erit ex æquali, vt A E, ad F, ita C G, ad H. Eadem ratione erit vt A E, ad B, ita C G, ad D: & conuertendo, vt B ad A E, ita D ad C G. ſed vt A E, ad F, ita erat C G ad H; ex æquali igitur erit vt B ad F, ita D, ad H: & componendo, vt B F ad F, ita D H ad H: & conuertendo, vt F ad B F, ita H, ad D H. Sed vt A E, ad F, ita erat C G ad H; ex æquali igitur erit vt A E ad B F, ita C G, ad D H. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VIII.

Si ſint tres magnitudines ſe ſe æqualiter excedentes; & aliæ eiuſdem generis illis multitudine æquales, binæque ſumptæ in duplicata primarum proportione; erit vtriuſque ordinis minor proportio compoſitæ ex primis ad compoſitam ex ſecundis, quam compoſitæ ex ſecundis ad compoſitam ex tertijs.

Sint tres magnitudines A, B, C, quarum C maxima æque ſuperet B, atque B, ipſam A. & totidem eiuſdem generis D, E, F, ſitque F ad E duplicata proportio ipſius C ad B: & E ad D, duplicata ipſius B ad A. Dico A D, ſimul ad B E, ſimul minorem eſſe proportionem quam B E, ſimul ad C F, ſimul. Eſto enim recta quæpiam G H, ad aliam rectam ſibi in directum poſitam H K, vt magnitudo A ad ipſius F duplam (hoc enim fieri poteſt) &



ſuper baſim G K; conſtituatur triangulum G L K, atque in eo deſcribatur parallelogrammum G H M N: & vt eſt

C ad

C ad B, ita fiat H M, ad M Q. & vt B ad A, ita Q M, ad M P, & ipſi G K, parallelæ T P R, V Q S, ducantur. Quoniam igitur eſt vt C, ad duplam ipſius F, ita G H, ad H K; erit vt C ad F, ita eſt parallelogrammum G M, ad triangulum M H K: ſed vt C, ad B, ita eſt H M, ad M Q; hoc eſt parallelogrammum G M, ad parallelogrammum M V: & vt F, ad E, ita triangulum M H K, ad triangulum M Q S, ob duplicatam proportionem eius, quæ eſt H M ad M Q. hoc eſt ipſius C ad B; vt igitur trapezium N K, ad N S trapezium, ita erit, per præcedentem, C F, ſimul ad B E ſimul. Rurſus quoniam eſt conuertendo, vt parallelogrammum M V, ad parallelogrammum G M, ita B ad C. ſed vt parallelogrammum G M, ad triangulum K H M, ita erat C, ad F: & vt triangulum K H M, ad triangulum Q S M, ita F ad E; erit ex æquali, vt parallelogrammum M V, ad triangulum S Q M, ita B, ad E. Similiter ergo vt ante erit vt trapezium N S, ad N R trapezium, ita E B, ſimul ad A D, ſimul. Rurſus, quoniam æque excedit L V, ipſam L T, atque L G, ipſam L V; minor erit proportio L T ad L V, quam L V, ad L G: eſt autem trianguli L T R ad triangulum L V S, duplicata proportio ipſius L T, ad L V, & trianguli L V S, ad triangulum L G K, duplicata ipſius L V, ad L G, propter ſimilitudinem triangulorum; minor igitur proportio erit trianguli L T R, ad triangulum L V S, quam trianguli L V S, ad triangulum L G K; dempto igitur triangulo L N M, communi, minor erit proportio trapezij N R, ad trapezium N S, quam trapezij N S, ad trapezium N K. Sed vt trapezium N R, ad trapezium N S, ita eſt conuertendo A D ſimul ad B E, ſimul: & vt trapezium N S, ad trapezium N K, ita B E, ſimul ad C F, ſimul; minor igitur proportio erit A D, ſimul ad B E ſimul, quam B E ſimul ad C F, ſimul. Quod demonſtrandum erat.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Si recta linea vtcumque ſecta fuerit, cubus qui fit à tota æqualis eſt duobus ſolidis rectangulis, quæ ex partibus, & totius quadrato fiunt.

Sit recta linea A B ſecta in puncto C vtcumque. Dico cubum ex A B æqualem eſse duobus ſolidis rectangulis, quæ fiunt ex A C C B, & quadrato A B. Quoniam

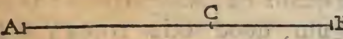


enim communi altitudine A B, eſt vt rectangulum B A C ad quadratum A B, ita ſolidum ex A B, & rectangulo B A C ad cubum ex A B, eademque ratione vt rectangulum A B C, ad quadratum A B, ita ſolidum eſt A B, & rectangulo A B C ad cubum ex A B; erunt vt duo rectangula B A C, A B C ad quadratum A B, ita duo ſolida ex A B, & rectangulis B A C, A B C ad cubum ex A B. Sed duo rectangula B A C, A B C ſunt æqualia quadrato A C; duo igitur ſolida ex A B, & rectangulis B A C, C B A, æqualia ſunt cubo ex A B. Sed ſolidum ex A B & rectangulo B A C eſt id quod fit ex A C, & A C & quadrato A B; duo igitur ſolida ex A C, C B, & quadrato A B ſimul ſumpta æqualia ſua cubo ex A B. Si igitur recta linea vtcumque ſecta fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO X.

Si recta linea vtcumque ſecta fuerit, cubus qui fit à tota æqualis eſt cubis partium, & duobus ſolidis rectangulis, quæ partium triplis, & earundem quadratis reciproce continentur.

Sit recta linea AB ſecta vtcumque in puncto C. Dico cubum ex AB æqualem eſse duobus cubis ex AC, CB, & duobus ſolidis rectangulis, quorum alterum fit ex tripla



ipſius AC, & quadrato BC; alterum autem ex tripla ipſius BC, & quadrato AC. Quoniam enim quadratum ex AB æquale eſt duobus quadratis ex AC, CB, & ei quod bis fit ex AC CB: & parallelepipeda eiuſdem altitudinis inter ſe ſunt vt baſes; erit rectangulorum ſolidorum id quod fit ex AC, & quadrato AB æquale cubo ex AC, & ei, quod fit ex AC, & rectangulo ACB bis, & ei, quod ex AC, & quadrato BC. Eadem ratione erit quod fit ex BC, & quadrato AB æquale cubo ex BC, & ei, quod fit ex BC, & rectangulo ACB, bis & ei, quod ex BC, & quadrato AC. Sed cubus ex AB æqualis eſt duobus ſolidis ex AC CB. & quadrato AB; cubus igitur ex AB æqualis eſt duobus cubis ex AC CB, & ſex ſolidis, quorum tres fiunt ex AC, & duobus rectangulis ex AC CB, & quadrato BC: tria vero ex BC, & duobus rectangulis ex AC CB, & quadrato AC. Sed quod fit ex AC, & rectangulo ACB, eſt quod fit ex BC, &

qua-

quadrato A C: & quod fit ex B C, & rectangulo A C B, eſt quod fit ex A C, & quadrato B C; cubus igitur ex A B æqualis eſt duobus cubis ex A C C B, vna cum ſex ſolidis, quorum tria fiunt ex A C, & B C quadrato, tria autem ex B C, & quadrato A C, hoc eſt duobus ſolidis, quorum alterum fit ex tripla ipſius A C, & quadrato B C, alterum ex tripla ipſius B C & quadrato A C. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XI.

Si recta linea vtcumque ſecta fuerit, cubus qui fit à tota æqualis eſt cubis partium vna cum ſolido rectangulo, quod totius tripla; & partibus continetur.

Sit recta linea A B ſecta in puncto C vtcumque. Dico cubum ex A B æqualem eſse duobus cubis ex A C, C B, vna cum ſolido rectangulo ex A C C B, & tripla ipſius A B. Quoniam enim quod fit ex A C, & rectangulo A C B, eſt id quod fit ex B C, & quadrato A C: & quod fit ex B C, & rectangulo A C B, eſt id, quod fit ex



A C & quadrato B C. ſed duo ſolida ex A C C B, & rectangulo A C B ſunt id, quod fit ex compoſita vtriuſque altitudine A B, et rectangulo A C B; duo igitur prædicta ſolida, quæ ex A C C B, & earum quadratis reciproce fiunt æqualia ſunt ſolido ex A B B C C A, & triplum triplo, videlicet duo ſolida, quæ fiunt reciproce ex triplis

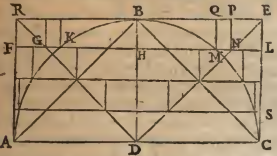
ipſarum

ipſarum A C, C B, & quadratis ex A C C B, æqualia ſimul ei, quod ter fit ex A B, B C, C A, hoc eſt ei, quod partibus A C C B, & totius A B tripla continetur: additis igitur communibus duobus cubis ex A C, C B, erit id, quod fit ex A C C B, & tripla ipſius A B, & duo cubi ex A C C B, æqualia duobus ſolidis, quæ fiunt reciproce ex triplis ipſarum A C, C B, & earundem A C, C B, quadratis, & duobus cubis ex A C, C B, hoc eſt cubo ex A C. Si igitur recta linea vtcumque ſecta fuerit, &c. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XII.

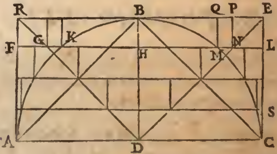
Hemiſphærium duplum eſt coni, cylindri autem ſubſeſquialterum eandem ipſi baſim, & eandem altitudinem habentium.

Eſto hemiſphærium; cuius axis B D, baſis circulus, cuius diameter A C, ſuper quem cylindrus A E, & conus



A B C, quorum communis axis ſit B D, ac propterea etiam eadem altitudo. Dico hemiſphærium A B C, coni A B C eſſe duplum: cylindri autem A E ſubſeſquialterũ. ſuper baſim enim circulum R E, vertice D deſcribatur

conus E D R. Sectoque axe B D primo bifariam, deinde ſingulis eius partibus rurſus bifariam, tranſeant per puncta ſectionum plana baſi hemiſphærij A C æquidiſtantia, quæ ſecent hemiſphærium, conum, & cylindrum. Sectus igitur erit A E cylindrus in cylindros æqualium altitudinum: ſuper ſectiones autem coni, atque hemiſphærij nempe circulos, quorum centra in axe B D exiſtunt cylindri conſtituti intelligantur binis quibuſque proximis æquidiſtantibus planis interiecti, quorum axes omnes æquales in B D. Erit igitur cono E D R inſcripta, & A B C



hemiſphærio circumſcripta figura quædam ex cylindris æqualium altitudinum. Sint autem hæ figuræ ea ratione hæc circumſcripta illa inſcripta, vt circumſcripta excedat hemiſphærium, minori exceſſu, inſcripta vero deficiat à cono minori defectu quam ſit magnitudo propoſita, quantacumque illa ſit. His conſtitutis, manifeſtum eſt, reliquo cylindri A E dempto hemiſphærio inſcriptam eſſe figuram ex reſiduis cylindrorum, in quos cylindrus A E ſectus fuerit, demptis cylindris hemiſphærio circumſcriptis, deficientem à reliquo cylindri A E dempto hemiſphærio minori defectu magnitudine propoſita, eodem ſcilicet, quo figura hemiſphærio circumſcripta excedit hemiſphærium, excepto reſiduo cylindri infimi A S, dempta hemiſphærij portione, quam comprehendit. Sit autem omnium

nium

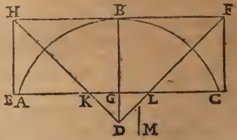
nium prædictorum cylindri A E cylindrorum ſupremus F E, cuius axis B H, & communis ſectio plani per punctum H tranſeuntis baſi hemiſphærij cum plano per axim B D, ſit recta F G K H M N L. Quoniam igitur rectangulum D H B bis vna cum duobus quadratis D H, B H, æquale eſt B D quadrato: & rectangulum D H B bis vna cum quadrato B H, eſt rectangulum ex B D D H tanquam vna,& B H; rectangulum ex B D, D H tanquam vna & B H, vna cum quadrato D H æquale erit quadrato B D, hoc eſt quadrato F H: quorum quadratum K H æquale eſt rectangulo ex B D, D H, tanquam vna,& B H; reliquum igitur quadrati F H dempto quadrato K H æquale erit reliquo quadrato D H, hoc eſt quadrato G H: & quadruplum quadruplo reliquum quadrati F L dempto quadrato M K toti G N quadrato,hoc eſt reliquum circuli, F L dempto circulo M K, æquale circulo G N. Quare & G P, cylindrus reliquo cylindri F E dempto Q K, cylindro æqualis erit, propter æqualitatem altitudinum. Similiter oſtenderemus ſingula reliqua cylindrorum eiuſdem altitudinis, in quos totus cylindrus A E ſectus fuit, demptis cylindris hemiſphærio circumſcriptis æqualia eſſe ſingulis cylindris cono E D R inſcriptis, quæ inter eadem plana interijciuntur. Tota igitur figura ex prædictis cylindrorum reſiduis reliquo cylindri A E, dempto hemiſphærio inſcripta æqualis erit figuræ cono E D R inſcriptæ: deficit autem vtraque harum figurarum hæc à cono A D R,illa à reſiduo cylindri A E dempto hemiſphærio minori exceſſu magnitudine vtcumque propoſita; reliquum igitur cylindri A E dempto hemiſphærio æquale eſt cono E D R,ſed conus E D R;hoc eſt conus A B C cylindri A E eſt pars tertia;reliquum igitur cylindri A E dempto hemiſphærio,cylindri A E eſt pars tertia, hoc eſt cylindrus A E triplus dicti reſidui: quamobrē A E cylindrus ſeſquialter hemiſphærij A B C: & cōuertendo,hemiſphærium

cylindri A E ſubſeſquialterum: coni igitur A B C duplum. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XIII.

Omnis minor ſphæræ portio, ad cylindrum, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, altitudo autem eadem portioni, eam habet proportionem, quam exceſſus, quo tripla ſemidiametri ſphæræ excedit tres deinceps proportionales, quarum maxima eſt ſphæræ ſemidiameter, media vero quæ inter centra ſphæræ & baſis portionis interijcitur; ad ſemidiametri ſphæræ triplam.

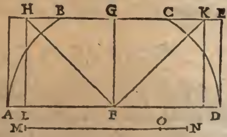
Sit ſphæræ, cuius centrum D, ſemidiameter B D, minor portio A B C, cuius axis B G ſegmentum ſemidiametri B D, baſis autem circulus, cuius diameter A C. Sitque E F, cylindrus, cuius axis, ſiue altitudo eadem B G: baſis autem æqualis circulo maximo, cuius ſemidiameter B D. Dico portionem A B C, ad cylindrum E F eam habere proportionem, quam exceſſus, quo tripla ipſius B D, ſuperat tres B D, D G; & minorem extremam ad ipſas, quæ ſit M; ad ipſius B D triplam. vertice enim D, baſi cylindri E F, cuius diameter F H deſcribatur conus F D H, cuius intelligatur fruſtum F H K L abſciſſum plano, quod abſcidit



ſcidit portionem A B C, plano circuli F H parallelum. Quoniam igitur fruſtum F H K L æquale eſt cylindri E F reſiduo, dempta A B C portione, quod ex præcedenti theoremate perſpicuum eſse debet: erit portio A B C æqualis ei, quod relinquitur cylindri E F, ſi fruſtum auferatur F H K L: ſed hoc reliquum eſt ad cylindrum E F, vt exceſſus, quo tripla lineæ F H, ſuperat tres deinceps proportionales F H, K L, & minorem extrema, ad triplam lineæ F H: & vt F H, ad K L, ita eſt B D ad D G, & D G, ad M; vt igitur exceſſus, quo tripla ipſius B D, ſuperat tres B D, D G, & M, ſimul, ad lineæ B D triplam, ita erit portio A B C ad cylindrum E F. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XIV.

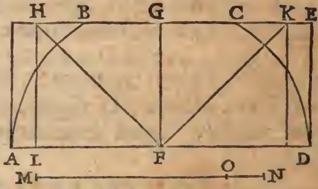
Omnis portio ſphæræ abſciſsa duobus planis parallelis altero per centrum acto ad cylindrum, cuius baſis eſt eadem baſi portionis, ſiue circulo maximo, & eadem altitudo, eam habet proportionem, quam exceſſus, quo maior extrema ad ſphæræ ſemidiametrum, & axim portionis excedit tertiam partem axis portionis; ad maiorem extremam antedictam.



Sit portio A B C D, ſphæræ, cuius centrum F, abſciſſa duobus planis parallelis altero per centrũ F tranſeunte; axis autem portionis ſit F G: &

maior

maior baſis, circulus maximus, cuius diameter A D, minor autem, cuius diameter B C: & cylindrus A E, cuius baſis circulus A D, axis F G; & vt F G ad F A, ita ſit F A, ad M N, à qua abſcindatur N O, pars tertia ipſius F G. Dico A B C D portionẽ ad cylindrum A E eſſe vt O M ad M N. Poſita enim G H, æquali ipſi F G, deſcribatur circa axim F G, cylindrus L K, & conus H F K. Quoniam igitur duo cylindri A E, L K, ſunt eiuſdem altitudinis, erunt inter ſe vt baſes, A D, K H. hoc eſt cylindrus A E ad cylindrum L K, duplicatam habebit proportionem diametri A D, ad diametrum K H, hoc eſt eius, quæ eſt ſemidiametri A F ad ſemidiametrum G H. hoc eſt eam, quæ eſt M N ad G H, ſiue F G. Sed vt F G ad tertiam ſui partem N O, ita eſt cylindrus K L, ad conum K F H; ex æquali igitur, erit vt M N ad N O, ita cylindrus A E ad conum K F H, hoc eſt ad reliquum cylindri A E dempta A B C D portione: & per conuerſionem rationis, vt N M, ad M O, ita cylindrus A E ad portionem A B C D: & conuertendo, vt M O ad M N, ita portio A B C D ad cylindrum A E. Quod eſt propoſitum.

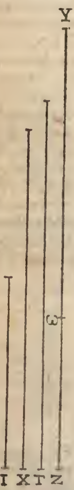


PROPOSITIO XV.

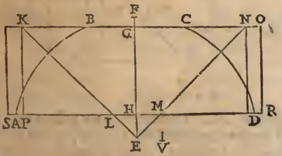
Omnis portio ſphæræ abſciſſa duobus planis parallelis neutro per centrum, nec centrum intercipientibus ad cylindrum, cuius baſis æqualis eſt

circulo

circulo maximo, altitudo autem eadem portioni, eam proportionē habet, quam exceſſus, quo maior extrema ad triplas ſemidiametri ſphæræ, & eius quæ inter centrū ſphæræ, & minoris baſis portionis interijcitur, ſuperat tres deinceps proportionales, quarum maxima eſt quæ inter centra ſphæræ, & minoris baſis, media autem, quæ inter centræ ſphæræ, & maioris baſis portionis interijcitur; ad maiorem extremam antedictam.

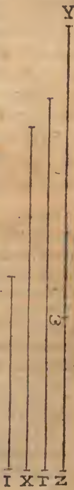


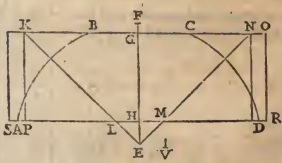
Sit portio A B C D ſphæræ, cuius centrum E, abſciſsa duobus planis parallelis, neutro per E tranſeunte, nec E intercipiētibus, cuius maior baſis ſit circulus, cui diameter A D. minor autem cuius diameter B C; axis G H. circa quem cylindrus O S, conſiſtat, cuius baſis ſit circulus circa S R æqualis circulo maximo: ſphæræ autem ſemidiater ſit E H G. & vt G E ad E H, ita ſit H E ad V: & po-



ſita T tripla ipſius E F, & X itidem tripla ipſius E G, vt X ad

ad T, ita fiat T ad Z Y, cuius Z ω, tribus G E, E H, V ſimul ſit æqualis. Dico A B C D portionem ad cylindrum S O eſse vt ω Υ ad Υ Z. Abſciſsa enim G K ipſi E G æquali, cylindrus P N circa axim G H, & conus K E N conſtituantur vt in præcedenti. planum igitur abſcindens portionem facit fruſtum coni K E N, quod ſit K L M N, cuius minor baſis circulus, cui diameter L M; maior autem cui diameter K N. Et vt eſt G E ad E F, hoc eſt G K ad S H, ita ſit E F, vel S H, ad I. vt igitur in præcedenti, oſtenderemus cylindrum S O ad cylindrum P N eſse vt I ad G K ſiue ad E G. Quoniam igitur ſunt ternæ deinceps proportionales G E, E F, I, & X, T, Z Y, eſtque vt F E ad E G ita T ad X; erit vt I ad E G, hoc eſt vt cylindrus S O ad P N cylindrũ ita Z Y ad X. Et quoniam eſt vt G E ad E H, ita E H ad V: hoc eſt, vt G K ad L H. ita L H ad V: & ponitur X tripla ipſius



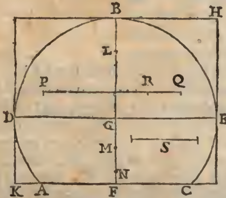


E G, hoc eſt ipſius G K, vt autem eſt tripla ipſius G K ad tres deinceps proportionales G K, L H, V, ita eſt cylindrus P N ad fruſtum L K N M; erit vt X ad tres G E, E H, V ſimul hoc eſt ad lineam ω Z, ita cylindrus P N ad fruſtum

ſtum K L M N. Sed vt Z Y ad X, ita erat cylindrus S O ad P N cylindrum; ex æquali igitur erit vt Z Y ad Z ω, ita cylindrus S O ad fruſtum K L M N: hoc eſt, ad reliquum cylindri S O dempta A B C D portione, & per conuerſionem rat onis, vt Z Y, ad Y ω, ita cylindrus S O ad portionē A B C D: & conuertendo vt ω Y ad Y Z, ita portio A B C D ad S O cylindrum. Quod demonſtrandū erat.

PROPOSITIO XVI.

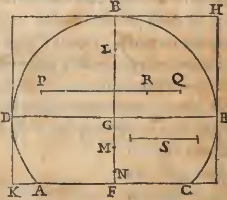
Omnis maior ſphæræ portio ad cylindrum, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, altitudo autem eadem portioni eam habet proportionem, quam ad axim portionis habet exceſſus, quo ſegmentum axis portionis inter ſphæræ centrum, & baſim portionis interiectum ſuperat tertiam partem minoris extremæ maiori poſita prædicto axis ſegmento in proportione ſemidiametri ſphæræ ad prædictum ſegmentū, vna cum ſubſeſquialtera reliquì axis ſegmenti.



Sit ſphæræ, cuius centrū G, diameter D G E maior portio A B C, axis autem portionis B G F, communis cylindro K H, cuius baſis æqualis ſit circulo maximo; baſis autem

D por-

portionis circulus, cuius diameter A C, & vt E G ad G F, ita ſit G F ad S, & S ad F M, cuius ſit pars tertia F N, & ponatur ipſius B G, ſubſeſquialtera G L. Dico portionem A B C ad cylindrum K H eſse vt L N ad B F. Nam vt F G ad G E, ſiue ad B G, ita ſit E G ad P Q, à qua abſcindatur Q R, pars tertia ipſius F G. Et plano per G tranſeunte baſibus cylindri K H, & A B C portionis parallelo ſecentur vna cylindrus K H in duos cylindros D H, E K: & portio A B C, in portionem E C A D, & D B E hemiſphærium. Quoniam igitur eſt conuertendo, vt P Q ad E G, ita E G ad G F, & eſt ipſius G F pars tertia Q R, erit portio D A C E ad cylindrum E K, vt P R ad P Q. Rurſus, quia eſt vt E G ad G F: hoc eſt vt P Q ad E G, ita G F ad S, & vt E G ad G F, ita eſt S ad F M; erit ex æquali, vt P Q ad G F, ita G F ad F M. Sed vt G F ad R Q, ita eſt M F ad F N, tertiam ipſius M F partem, ex æquali igitur erit vt P Q ad Q R, ita G F ad F N, & per conuerſionem rationis, & conuertendo, vt P R ad P Q, ita N G ad G F. Sed vt P R ad P Q, ita erat portio E C A D ad cylindrum E K; vt igitur N G ad G F, ita erit portio E C A D ad cylindrum E K. Sed vt G F ad F B, ita eſt cylindrus E K ad cylindrum K H: ex æquali igitur vt N G ad B F, ita portio E C A D, ad cylindrum K H. Similiter oſtenderemus eſse, vt G L ad B F, ita D B E hemiſphærium

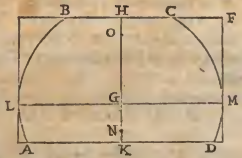


rium

rium ad cylindrum K H, cum vt L G ad G B, ita ſit hemiſphærium D B E ad cylindrum D H. vt igitur prima cum quinta ad ſecundam, ita tertia cum ſexta ad quartam; videlicet, vt tota L N ad B F, ita portio A B C ad cylindrum K H. Quod erat demonſtrandum.

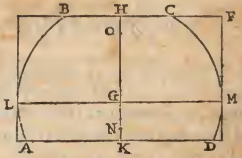
PROPOSITIO XVII.

Omnis portio ſphæræ abſciſſa duobus planis parallelis centrum intercipientibus ad cylindrum, eiuſdem altitudinis, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, eam habet proportionem, quam ad axim portionis habet exceſſus, quo axis portionis ſuperat tertiam partem compoſitæ ex duabus minoribus extremis, maioribus poſitis duobus axis ſegmentis, quæ fiunt à centro ſphæræ in rationibus, ſemidiametri ſphæræ ad prædicta ſegmenta.



Sit portio A B C D, ſphæræ, cuius centrum G, abſciſsa duobus planis parallelis centrum G intercipientibus, quod erit in axe portionis, qui ſit H K. Sectiones autem factæ à prædictis planis ſint circuli, quorum diametri A D, B C, qui circuli erunt baſes oppoſitæ portionis. Sectaque per punctum G, portione A B C D plano ad axim erecto,

atque ideo & portionis baſibus parallelo; ſuper ſectionem, quæ erit circulus maximus, cuius diameter L M, duo cylindri deſcripti intelligantur, ad oppoſita portionis baſium plana terminati ex illis autem totus cylindrus compoſitus E F, cuius baſis æqualis circulo maximo L M. Deinde in ſegmento G H ſumpta O H, tertia parte minoris extremæ maiori G H in proportione, quæ eſt L G ad G H; & in ſegmento G K, ſumatur



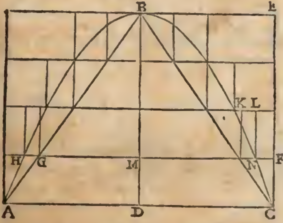
N K, tertia pars minoris extremæ maiori G K, in proportione, quæ eſt L G ad G K. Dico portionem A B C D ad cylindrum E F, eſse vt N O ad K H. Sumptis enim ijſdem, quæ in præcedentis ſumpſimus, demonſtrationem ſimiliter oſtenderemus tam portionem L B C M ad cylindrum E F, eſse vt O G ad K H, quam portionem L A D M ad eundem E F cylindrum, vt N G ad eundem axim K H; vt igitur prima cum quinta ad ſecundam, ita tertia cum ſexta ad quartam: videlicet, vt N O ad K H, ita portio A B C D ad E F cylindrum. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XVIII.

Omne conoides parabolicum dimidium eſt cylindri, coni autem ſeſquialterum eandem ipſi baſim, & eandem altitudinem habentium.

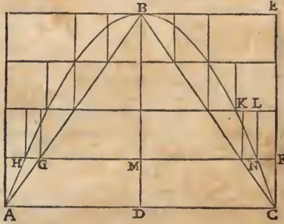
Sit

Sit conoides parabolicum A B C, & cylindrus A E, & conus A B C, quorum omnium ſit eadem baſis circulus, cuius diameter A C, axis autem B D, ac proinde vna omnium altitudo. Dico conoidis A B C eſse cylindri A E dimidium, coni autem A B C ſeſquialterum. Secto enim axe B D in tot partes æquales, quarum infima ad baſim ſit M D, vt figura ex cylindris æqualium altitudinum conoidi A B C circumſcripta, inſcriptam ſuperet minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita, & ſit hoc factum. Et quoniam quibus planis parallelis tranſeuntibus per prædictas ſectiones axis B D ſecatur conoides A B C, ijſdem ſecatur triangulum per axim A B C, eruntque ſectiones parallelæ: ſit triangulo A B C circumſcripta figura ex parallelogrammis æqualium altitudinum, quæ triangulum & ipſa excedat minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita. Cylindrorum autem qui ſunt circa conoides, & parallelogrammorum multitudine æqualium, quæ ſunt circa triangulum A B C, duo proximi baſi A C. cylindri ſint A F, H L, & totidem parallelogramma illis reſpondentia inter eadem plana parallela ſint A F, G K. Quoniam igi-



tur

tur in parabola A B C rectis ad diametrum ordinatim applicatis eſt vt B M a d B D longitudine, ita M H ad A D potentia: hoc eſt, ita circulus, cuius diameter H M N, ad circulum, cuius diameter A D C, hoc eſt ita cylindrus H L, ad cylindrum A F propter æqualitatem altitudinum: ſed vt B M ad B D, ita eſt G M ad A D, propter ſimilitudinem triangulorum, hoc eſt ita parallelogrãmum G K ad A F, parallelogrammum; ergo vt parallelogrammum G K ad parallelogrãmum A F, ita eſt cylindrus H L ad cylindrum A F. Similiter oſtenderemus reliqua parallelogramma, quæ ſunt



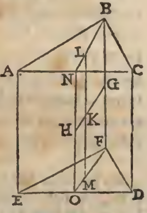
circa triãgulum A B C eſſe cum reliquis cylindris, qui ſunt circa conoides A B C bina ſumpta prout inter ſe reſpondent in eadem proportione; ſemper igitur componendo, & ex æquali erit vt tota figura triangulo A B C circumſcripta ad parallelogrammum A F, ita figura conoidi circumſcripta ad A F cylindrum: ſed vt parallelogrammum A F, ad parallelogrammum A E, ita eſt cylindrus A F ad cylindrum A E, propter æqualitatem omnifariam ſumptarum altitudinum; ex æquali igitur erit vt figura triangulo A B C circumſcripta ad parallelogrammum A E, ita figura conoidi

A B C

A B C circumſcripta ad A E cylindrum: vtraque autem circumſcriptarum figurarum excedit ſibi inſcriptam minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita, vt igitur triangulum A B C, ad parallelogrammum A E, ita erit conoides A B C, ad cylindrum A E. Sed triangulum A B C eſt parallelogrammi A E dimidium; igitur conoides A B C eſt cylindro A E dimidium: ſed cylindrus A E eſt coni A B C, triplum: igitur conoides A B C, erit coni A B C ſeſquialterum. Quod demonſtrandum erat.

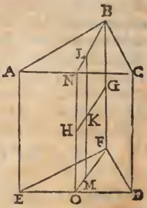
PROPOSITIO XIX.

Omnis priſmatis triangulam baſim habentis centrum grauitatis rectam lineam, quæ cuiuſlibet trium laterum bipartiti ſectionem, & oppoſiti parallelogrammi centrum iungit, ita diuidit, vt pars, quæ attingit latus ſit dupla reliquæ.



Sit priſma, quale diximus A B C D E F, ſectoque vno ipſius latere B F in puncto G, bifariam parallelogrammi oppoſiti ſit centrum H, & iuncta G H, cuius pars G K ſit dupla reliquæ K H. Dico priſmatis A B C D E F, centrum grauitatis eſſe K. Per punctum enim H ducatur N O ipſi A E, vel C D parallela, quæ ipſas A C, E D, ſecabit bifariã: iunctisque B N, F O, ducatur per punctum K, ipſi F B, vel N O parallela L M. Quoniam igitur eſt vt H K ad K G, ita N L ad L B, & O M ad M F, erit N L, ipſius L B, & O M ipſius

ipſius M F dimidia: ſed & rectæ B N, F O, triangulorum baſes A C, E D, bifariam ſecant; erunt igitur puncta L, M, centra grauitatis triangulorum A B C, D E F, oppoſitorum. Priſmatis igitur A B C D E F axis erit L M: quare in eius bipartiti ſectione priſmatis A B C D E F centrum grauitatis: ſectus autem eſt axis L M bifariam in puncto K; nam ob parallelogramma eſt vt N H ad H O, ita L K ad K M; priſmatis igitur A B C D E F, centrum grauitatis erit *K*. Quod demonſtrandum erat.

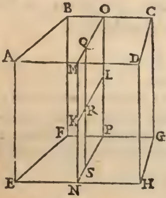


PROPOSITIO XX.

Omnis priſmatis baſim habentis trapezium, cuius duo latera inter ſe ſint parallela centrum grauitatis rectam lineam, quæ æque inter ſe diſtantium parallelogrammorum centra iungit, ita diuidit, vt pars, quæ dictorum parallelogrammorum minus attingit ſit ad reliquam, vt duorum baſis laterum parallelorum dupla maioris vna cum minori ad duplam minoris vna cum maiori.

Sit priſma A B C D E F G H, cuius baſis trapezium A B C D, habens duo latera A D, B C, inter ſe parallela, ſitque eorum A D maius: parallela igitur erunt inter ſe duo parallelogramma B G, A H. Sit parallelogrammi A H centrum K, & B G parallelogrammi centrum L, iunctaque

que L K, fiat vt dupla ipſius A D vna cum B C ad duplam ipſius B C vna cum A D, ita L R ad R K. Dico priſmatis A G centrum grauitatis eſse R. Ducantur enim per puncta L, K lateribus priſmatis, atque ideo inter ſe parallelæ M N, O P, quæ ob centra K, L, ſecabunt oppoſita parallelogrammorum latera bifariam, eas ſectiones connectant M O, N P, ipſique M N, vel O P, parallela ducatur Q R S. Quoniam igitur eſt vt L R ad R K, hoc eſt vt dupla ipſius A D vna cum B C ad duplam ipſius B C vna cum A D, ita O Q ad Q M, & recta M O bifariam ſecat A C trapezij latera parallela, punctum Q, A C trapezij centrum grauitatis; ſimiliter & punctum S erit E G, trapezij centrum grauitatis: priſmatis igitur A G axis erit Q S, & centrum grauitatis R, quod eſt in medio axis. Omnis igitur priſmatis baſim habentis trapezium,&c. Quod demonſtrandum erat.

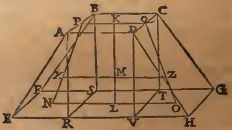


PROPOSITIO XXI.

Si à quolibet prædicto priſmate duo priſmata baſes habentia triangulas ſint ita abſciſſa, vt parallelepipedum relinquant baſim habens minus parallelogrammorum inter ſe parallelorum prædicti priſmatis, maioris autem partes æqualia parallelogramma ipſum parallelepipedum relin-

quat, centrum grauitatis vtriuſque abſciſsi priſmatis tamquam vnius magnitudinis rectam lineam, quæ prædicti priſmatis parallelorum parallelogrammorum centra iungit, ita diuidit, vt pars, quæ minus parallelogrammum attingit ſit dupla reliquæ.

Sit priſma A B C D E F G H, cuius baſes oppoſitæ trapezia A D H E, B C G F. Sint autem A D, E H, parallelæ, quarum maior E H. Oppoſita igitur parallelogramma A C, E G, inter ſe erunt parallela, quorum maius E G. At per rectas A B, C D, ſectum ſit priſma A B C D E F G H, ita vt abſciſſa priſmata A B S F E R, C D V H G T, relinquant parallelepipedum A T, ipſum autem A T, relinquat duo parallelogramma æqualia E S, T H. Poſito autem centro K parallelogrammi A C, & L, parallelogrammi E G, iunctaque K L, ponatur K M, dupla ipſius M L. Dico duorũ priſmatum B E R, C V H, ſimul centrum grauitatis

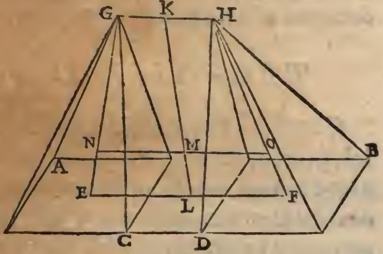


eſse M. Sectis enim A B, C D, bifariam in punctis P, Q, ſumptiſque parallelogrammorum E S, V G, centris N, O, iungantur P N, Q O, & poſita P X dupla ipſius X N, & Q Z dupla ipſius Z O, iungantur rectæ P K Q, X Z, N O. Quoniam igitur in quadrilatero P Q O N, recta X Z, parallela eſt vtrilibet ipſarum P Q, N O, ſecat ijs parallelis interceptas in eaſdem rationes; recta igitur X T per punctum

ctum M tranſibit. Sed quia P K eſt æqualis K Q, & N L ipſi L O, etiam X M æqualis erit ipſi M Z ob parallelas; cum igitur priſmatum B E R, C V H centra grauitatis ſint X, Z; erit vtriuſque priſmatis prædicti ſimul centrum grauitatis M. Quod eſt propoſitum.

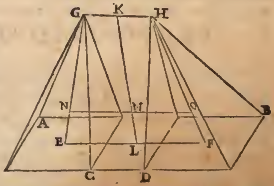
PROPOSITIO XXII.

Si ſint duæ pyramides æquales, & æque altæ, baſes habentes in eodem plano, quarum vertices recta linea connectens cum ea, quæ baſium centra grauitatis iungit ſit in eodem plano; earum centrum grauitatis tamquam vnius magnitudinis rectam lineam, quæ inter vertices, & centra baſium interiectas bifariam ſecat, ita diuidit, vt pars ſuperior ſit inferioris tripla.



Sint duæ pyramides æquales, & æque altæ, quarum baſes in eodem plano A C, D B, vertices autem G, H, & baſium cētra E, F, iunctæque E F, G H, quas bifariam ſecet recta K L, huius autem pars quarta ſit L M. Dico vtriuſque pyramidis G A C, H D B, ſimul centrum grauitatis eſſe M. Iunctis enim G E, H F, ſumantur ea-

rum quartæ partes E N, F O, & iungatur N O. Quoniam igitur propter æqualitatem altitudinum, & quia E F, G H, ſunt in eodem plano, ſunt E F, G H, inter ſe parallelæ, & vt G N ad N E, ita eſt H O ad O F; erit N O ipſi E F, vel G H, parallela, quas K L bifariam ſecat: igitur & ipſam N O ſecabit bifariam, iungit autem recta N O centra grauitatis pyramidũ æqualium G A C, H D B, vtriuſque ergo pyramidis ſimul centrum grauitatis erit in communi ſectione duarum linearum K L, N O, ſed recta N O, ſecans ſimiliter ipſas G E, K L, H F, ipſam K L, ſecabit in puncto M; punctum igitur M, erit prædictarum pyramidum centrum grauitatis. Quod demonſtrandum erat.

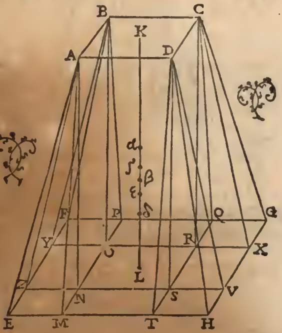


PROPOSITIO XXIII.

Omnis fruſti pyramidis baſim habentis parallelogrammum centrum grauitatis maiori baſi eſt propinquius, quam punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars minorem baſim attingens ſit ad reliquam vt dupla cuiuſuis laterum maioris baſis vna cum latere minoris ſibi reſpondente, ad duplã dicti lateris minoris baſis vna cum maioris ſibi reſpondente.

Sit

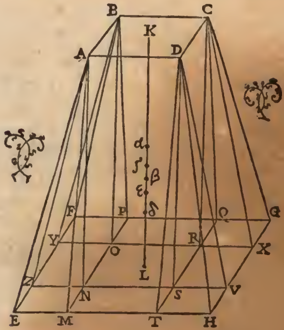
Sit pyramidis, cuius baſis parallelogrammum E F G H, fruſtum A B C D E F G H, eiuſq; axis K L, quo ſecto in puncto α ita vt K α ad α L, ſit vt laterum homologorum A D E H, dupla ipſius E H vna cum A D ad duplam ipſius A D vna cum E H, & fruſti A B C D E F G H ſit centrum grauitatis ι nempe in axe K L. Dico punctum ι, cadere infra punctum α. A punctis enim A, B, C, D, ducantur



ad maiorem baſim axi K L, parallelæ A N, B O, C R, D S, & parallelepipedum A B C D N O R S compleatur, & productis baſis N O lateribus, deſcriptæ ſint quatuor pyramides A E M N Z, B O P F Y, C G X R Q, D H V S T, quarum baſes erunt parallelogramma circa diametrum æqualia, atque ſimilia: & quatuor priſmata triangulas baſes habentia, quorum binorum ex aduerſo inter ſe reſpon-

dentium

dentium parallelogramma in plano E G exiſtentia erunt inter ſe æqualia, atque ſimilia, ſcilicet M S ipſi O Q, & Z O, ipſis R V: ſitque axis K L pars tertia L β, quarta autem L δ. Quoniam igitur ex ſupra demonſtratis priſmatis A B C D T M P Q eſt centrum grauitatis α; duorum autem priſmatum oppoſitorum A B Y O N Z, C D S R X V, centrum grauitatis β, erit reliqui ex fruſto A B



C D E F G H demptis quatuor prædictis pyramidibus in $\alpha\beta$ centrum grauitatis, quod ſit γ. Nam ex primo libro conſtat punctum α cadere ſupra punctum β, ſi compleatur trapezium A C G E, cuius diameter erit K L. Sed earum quatuor pyramidum eſt centrum grauitatis δ. Si enim baſium, quibus binæ oppoſitæ pyramides inſiſtunt centra grauitatis, & bini oppoſiti vertices ſingulis rectis lineis

neis connectantur, erunt binæ connectentes parallelæ, & ab axe K L bifariam ſecabuntur, vt figuræ deſcriptio manifeſtat. Totius igitur fruſti A B C D E F G H, centrum grauitatis ι in linea $\gamma\delta$ cadet: ſed punctum γ cadit infra punctum α, multo ergo inferius, & baſi E G propinquius punctum ι quam punctum α. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXIV.

Omnis fruſti conici centrum grauitatis propinquius eſt maiori baſi quam punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars minorem baſim attingens ſit ad reliquam, vt dupla diametri maioris baſis vna cum minoris diametro ad duplam diametri minoris baſis vna cum diametro maioris.

Hoc eadem ratione deducetur ex antecedenti, qua centrum grauitatis fruſti conici in extremo primo libro demonſtrauimus, quandoquidem ſimiliter vt ibi fecimus, omnis pyramidis centro grauitatis idem probaremus accedere quod prædictæ pyramidis in antecedente.

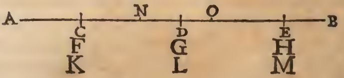
PROPOSITIO XXV.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ illis multitudine æquales, binæque ſumptæ in eadem proportione, quæ commune habeant centrum grauitatis, centra autem grauitatis omnium ſint in eadem recta linea; primæ & ſecundæ tanquam

duæ

duæ magnitudines commune habebunt centrum grauitatis.

Sit recta linea AB, & quotcumque magnitudines FGH, & totidem KLM, binæ in eadem proportione: nimirum vt F ad G ita K ad L: & vt G ad H ita L ad M. in recta autem AB, ſint communia centra grauitatis, C duarum FK, & D duarum GL: & E duarum HM. Omnium autem primarum tamquam vnius magnitudinis ſit centrum grauitatis O. Dico & omnium ſecundarum ſimul centrum grauitatis eſse O. Duarum enim FG ſi-



mul ſit centrum grauitatis N. Vt igitur eſt F ad G, hoc eſt, vt K ad L, ita erit DN, ad NC. punctum igitur N eſt centrum grauitatis duarum magnitudinum KL ſimul. Rurſus, quia componendo, & ex æquali, eſt vt FG ſimul ad H, ita KL ſimul ad M: eſt autem tam duarum FG, quam duarum KL ſimul centrum grauitatis N, ſimiliter vt ante oſtenderemus duarum magnitudinum FGH, KLM centrum grauitatis eſse O. Quod eſt propoſitum.

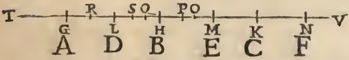
PROPOSITIO XXVI.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis multitudine æquales primarum, ex quibus centra grauitatis in eadem recta linea diſpoſita ſint alternatim ad centra grauitatis ſecundarum, qua-

rum

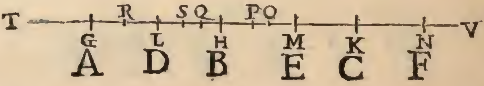
rum magnitudinum binæ eodem ordine, qui ſumitur ab eodem prædictæ lineæ termino vna in primis, & altera in ſecundis inter ſe ſint æquales; omnium primarum ſimul, ex quibus primæ centrum grauitatis propinquius eſt prædicto lineæ termino quàm primæ ſecundarum, propinquius erit prædicto lineæ termino quàm omnium ſecundarum ſimul centrum grauitatis.

Sint quotcumque magnitudines A B C primæ, & totidem ſecundæ D E F, quarum centra grauitatis in recta linea T V, primarum quidem G ipſius A proximum om-



nium termino T, à quo ſumitur ordo. Deinde H ipſius B, & K, ipſius C, diſpoſita ſint alternatim ad centra ſecundarum; videlicet vt centrum grauitatis L, ipſius D cadat inter centra G, H, & M ipſius E inter centra H, K: & N inter puncta K, V: ſint autem æquales binæ A D, B E, C F: & omnium A B C ſimul centrum grauitatis P, & omnium D E F ſimul centrum grauitatis O. Dico punctum P propinquius eſſe termino T, quàm punctum O. Duarum enim A, B ſit centrum grauitatis R: & S, duarum D B, & Q, duarum D E. Quoniam igitur Q eſt centrum grauitatis duarum magnitudinum D E ſimul; erit vt D ad E, hoc eſt ad B, ita M Q, ad Q L: hoc eſt H S, ad S L. & componendo, vt M L, ad L Q, ita H L, ad L S; & permutando, vt M L ad L H, ita L Q ad L S: ſed M L eſt maior quàm L H; ergo & L Q erit maior quàm L S. Eadem ratione quoniam S eſt centrum gra-

uitatis duarum D B: & R duarum A B: & A D ſunt æquales; erit R H maior quàm S H: ſed quia L Q erat maior quàm L S, eſt & S H maior quàm Q H; multo igitur maior R H erit quàm Q H: atque ideo punctum R propinquius termino T, quàm punctum Q. Rurſus quoniam tota magnitudo A B eſt æqualis toti D E, & C æqualis F; erunt duæ primæ A B, & C, & totidem ſecundæ D E, & F, quarum vnius poſteriorum D E centrum grauitatis Q cadit inter R, K centra grauitatis duarum priorum A B, & C, & reliquæ priorum C centrum grauitatis K cadit inter Q, N, duarum poſteriorum D E, & F centra grauitatis; erunt vt antea quatuor magnitudines binæ proximæ æquales, ſcilicet A B, ipſi



D E: & C ipſi F, centra grauitatis habentes diſpoſita alternatim in eadem recta T V. Cum igitur primæ priorum A B, centrum grauitatis R ſit termino T propinquius quàm Q centrum grauitatis primæ poſteriorum, quæ eſt tota D E; ſimiliter vt ante totius magnitudinis A B C centrum grauitatis P erit termino T propinquius quàm totius D E F centrum grauitatis O. Non aliter oſtenderemus, quotcumque plures magnitudines, quales & quemadmodum diximus ad rectam T V, diſpoſitæ proponerentur, ſemper centrum grauitatis omnium priorum ſimul termino T propinquius cadere, quàm omnium poſteriorum ſimul centrum grauitatis. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XXVII.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ illis multitudine æquales, quæ binæ commune habeant in eadem recta centrum grauitatis; ſumpto autem ordine ab vno eius lineæ termino, maior ſit proportio primæ ad ſecundam in primis, quàm primæ ad ſecundam in ſecundis: & ſecundæ ad tertiam in primis maior quàm ſecundæ ad tertiam in ſecundis,& ſic deinceps vſque ad vltimas; erit omnium primarum ſimul centrum grauitatis propinquius prædicto lineæ termino,à quo ſumitur ordo,quàm omnium ſecundarum.

Sint quotcumque magnitudines GHI, & totidem LMN. Sitque maior proportio G ad H, quàm L ad M: & H ad I, maior quàm M ad N: in recta autem AB ſint communia centra grauitatis, C duarum magnitudinum GL, & D duarum HM, & E duarum IN. omnium



autem primarum GHI ſimul ſit centrum grauitatis K: at ſecundarum omnium LMN centrum grauitatis R. Dico centrum K cadere termino A propinquius quàm centrum R. Fiat enim vt G ad H, ita DP ad PC: & vt L ad M, ita DQ ad QC. Maior igitur proportio erit DP

ad P C, quàm D Q ad Q C: & componendo, maior D C ad C P, quàm D C ad C Q: minor igitur C P erit quàm C Q: quare D P maior quàm D Q. & communi addita E D, erit E P maior quàm E Q. Et quoniam K eſt centrum grauitatis omnium G H I ſimul, & ipſius G H eſt centrum grauitatis P, & reliquæ magnitudinis I, centrum grauitatis E; erit vt G H ad I, ita E K ad K P. eadem ratione vt vtraque L M ad N, ita erit E R ad R Q. Rurſus,



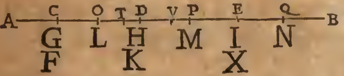
ſus, quia maior eſt proportio G ad H, quàm L ad M, erit componendo, maior proportio G H ad H, quàm L M ad M: ſed maior eſt proportio H ad K, quàm M ad N; ex æquali igitur, maior erit proportio G H ad I, quàm L M ad N, hoc eſt E K ad K P, quàm E R ad R Q. Multo ergo maior proportio E K ad K P, quàm E R ad R P: & componendo maior proportio E P ad P K quàm E P ad P R; minor igitur P K erit quàm P R, atque ideo centrum K propinquius termino A quàm centrum R. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXVIII.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis multitudine æquales, quarum omnium centra grauitatis ſint in eadem recta linea, & centra primarum ad centra ſecundarum diſpoſita ſint alternatim: ſit autem maior proportio primæ ad ſecundam

dam in primis quàm primæ ad ſecundam in ſecundis: & ſecundæ ad tertiam in primis, maior quàm ſecundæ ad tertiam in ſecundis, & ſic deinceps vſque ad vltimas; erit omnium primarum ſimul centrum grauitatis propinquius prædictæ lineæ termino à quo ſumitur ordo omnium ſecundarum centrum grauitatis.

Sit quotcumque magnitudines G H I, & totidem L M N primarum autem ſint centra grauitatis C D E cum ſecundarum centris O P Q in eadem recta A B diſpoſita alternatim, vt O cadat inter puncta C D, & P inter puncta D E, & E inter puncta P Q. ſitque maior proportio G ad H, quàm L ad M, & H ad I maior quàm M ad N. omnium autem primarum G H I ſimul ſit centrum grauitatis T; at omnium ſecundarum L M N, ſimul, cen-



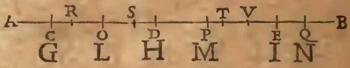
trum grauitatis V. Dico punctum T eſſe termino A propinquius quàm punctum V. Eſto enim F æqualis L, & K æqualis M, & X æqualis N, ſit autem centrum grauitatis ipſius F in puncto C, & ipſius K in puncto D, & ipſius X in puncto E. In recta igitur A B omnium F K X, ſimul centrum grauitatis erit termino A, propinquius quàm omnium L M N ſimul centrum grauitatis. Sed & omnium G H I, ſimul centrum grauitatis in eadem recta A B propinquius eſt termino A quàm omnium F K X, ſimul centrum grauitatis; multo igitur termino A propinquius erit omnium G H I ſimul quàm omnium

LMN,

LMN, ſimul centrum grauitatis. Quod demonſtrandum erat.

ALITER.

Poſito enim R centro grauitatis duarum magnitudinũ G, H, & S duarũ L,M, vel punctum V cadit in puncto E, vel in linea E B, vel in linea A E, ſi in puncto E vel in linea E B, cum igitur T ſit centrũ grauitatis trium magnitudinũ G,H,I ſimul,& E ipſius I, erit punctum T propinquius termino A quàm punctum V. Sed punctum V in linea A E cadat. Vel igitur S centrum grauitatis duarum magnitudinum L, M, ſimul cadit in puncto D, ſiue in linea D B, vel in linea A D. ſi in puncto D, vel in linea D B; centrum grauitatis R duarum magnitudinum G H erit termino A propinquius quàm ipſum S, & recta E R maior quàm E S.



Sed cadat punctum S in linea A D. Quoniam igitur maior eſt proportio G ad H, quàm L ad M: & vt G ad H, ita eſt D R ad R G, & vt L ad M, ita P S ad S O, maior erit proportio D R ad R C, quàm P S ad S O; multo ergo maior D R ad R C, quàm D S ad S O, & multo maior quàm D S ad S C, & componendo maior proportio D C ad C R, quàm D C ad C S; erit igitur C R minor quàm C S, atque adeo R D maior D S, addita igitur E D communi, erit E R maior quàm E S. Rurſus quia componendo, & ex æquali maior eſt proportio totius G H ad I quàm totius L M ad N, hoc eſt maior longitudinis E T ad T R, quàm Q V ad V S, & multo maior quàm

E V

EV ad VS, erit componendo, maior proportio ER ad RT quàm ES ad SV: & per conuerſionem rationis minor proportio ER ad ET; quàm ES ad EV, & permutando minor proportio ER ad ES quàm ET ad EV: ſed ER maior erat quàm ES, ergo ET maior erit quàm EV: & punctum T propinquius termino A, quàm punctum V. Quod demonſtrandum erat.

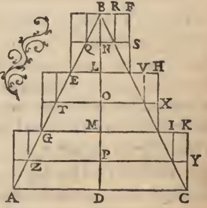
PROPOSITIO XXIX.

Datæ figuræ circa diametrum, vel axim in alteram partem deficienti, ſuper baſim rectam lineam vel circulum, vel ellipſim; cuius figuræ baſis, & ſectiones omnes parallelæ ſegmenta æqualia diametri vel axis intercipientes ita ſe habeant, vt quarumlibet trium proximarum minor proportio ſit minimæ ad mediam, quàm mediæ ad maximam; figura quædam ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum circumſcribi poteſt, cuius cētrum grauitatis ſit propinquius baſi quàm cuiuſlibet datæ figuræ, qualem diximus quæ prædictæ figuræ circa diametrum, vel axim circumſcripta ſit.

Sit figura circa diametrum, vel axim in alteram partē deficiens qualem diximus, cuius baſis circulus, vel ellipſis vel recta linea AC, axis autem vel diameter BD. Et data figura ipſi ABC figuræ circumſcripta compoſita ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum EF, GH, AK. Dico figuræ ABC alteram figuram, qualem diximus poſſe circumſcribi, cuius centrum

grani-

grauitatis, nempe in linea BD, ſit propinquius baſi AC ſiue termino D, quàm prædictæ datæ figuræ circumſcriptæ centrum grauitatis, Omnium enim cylindrorum, vel cylindri portionum, vel parallelogrammorum, ex quibus conſtat prædicta data figura circumſcripta ſint axes, vel quæ oppoſita latera coniungunt rectæ BL, LM, MD, quibus ſectis bifariam in punctis N, O, P, ac planis per ea ſiue rectis tranſeuntibus baſi AC parallelis, ſecantibuſque dictos cylindros, vel cylindri portiones, vel parallelogramma, compleatur & figuræ ABC circumſcribatur altera figura vt prior, quæ ob ſectiones factas componetur ex duplis multitudine cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis ęqualium altitudinum, eorum ex quibus conſtat data figura circumſcripta: ſint autem hi cylindri, aut reliqua, quæ diximus QR,



ES, TV, GX, ZI, AY. Quoniam igitur cylindrorum, vel cylindri portionum, vel parallelogrammorum quæ ſunt circa figuram ABC, minor eſt proportio QR ad ES, quàm ES, ad TV, propter ſectiones circulos, vel ſimiles ellipſes, vel rectas lineas, & æqualitatẽ altitudinũ, & figuræ propoſitæ naturã. Sed eadẽ ratione minor eſt proportio ES ad TV, quàm TV, ad GX; multo ergo minor proportio erit QR ad ES, quàm TV ad GX: & componendo, minor proportio QR, ES, ſimul ad ES, quàm TV, GX, ſimul ad GX. ſed vt GX ad GH, ita eſt ES ad EF; ex æquali igitur

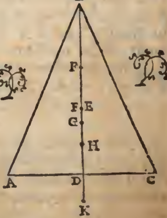
ſi igitur minor erit proportio QR, ES ſimul ad EF, quàm TV, GX ſimul ad GH. & permutando, minor proportio QR, ES ſimul ad TV, GX ſimul quàm EF ad GH. & conuertendo, maior proportio GX, TV ſimul ad ES, QR ſimul, quàm GH ad EF. Similiter oſtenderemus duo ZI, AY, ſimul ad TV, GX, ſimul, maiorem habere proportionem, quàm AK ad rectarum GH. Rurſus quoniam puncta N, O, in medio BL, LM, ſunt, ipſorum EF, GH, centra grauitatis: duorum autem QR, ES ſimul centrum grauitatis eſt in linea NL, proptereà quòd ES maius eſt quàm QR, & æquales BN, NL, quas centra grauitatis ipſorum QR, ES bifariam diuidunt, cadet ipſorum QR, ES, ſimul centrum grauitatis propius termino D, quàm ipſius EF centrum grauitatis, & duobus centris N, O, interijcietur. Eademque ratione duorum TV, GX, ſimul centrum grauitatis termino D erit propinquius quàm ipſius GH centrum grauitatis, & duobus centris O, P, duorum GH, AK interijcietur. Et duorum ZI, AY ſimul centrum grauitatis propinquius erit D termino, quàm P ipſius AK. Quoniam igitur omnia primarum magnitudinum, ex quibus conſtat figura ſecundo circumſcripta centra grauitatis in eadem recta linea BD, diſpoſita ſunt alternatim ad centra grauitatis ſecundarum primis multitudine æqualium, ex quibus data figura conſtat ipſi ABC figuræ circumſcripta, ſunt termino D propinquiora, quàm centra grauitatis ſecundarum, ſi bina, prout inter ſe reſpondent comparentur: maior autem proportio oſtenſa eſt primæ ad ſecundam in primis, quàm primæ ad ſecundam in ſecundis: & ſecundæ ad tertiam in primis, quàm ſecundæ ad tertiam in ſecundis, ſumpto ordine à termino D, erit centrum grauitatis omnium primarum ſimul, ideſt figuræ ipſi ABC figuræ ſecundo circumſcriptæ termino D propinquius, quàm datæ figuræ eidem ABC figuræ primo circumſcriptæ cen-

trum grauitatis. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXX.

Omnis prædictæ figuræ centrum grauitatis eſt propinquius baſi, quàm cuiuſlibet figuræ ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum ipſi circumſcriptæ.

Sit prædicta figura A B C, cuius axis vel diameter B D, & data intelligatur figura ex quotcumque cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum figuræ A B C circumſcripta, cuius ſit centrum grauitatis E, nempe in axe vel diametro B D. Dico centrum grauitatis figuræ ABC propinquius eſſe puncto D, quàm punctum E. Si enim fieri poteſt, centrum grauitatis figuræ A B C, quod ſit F, non cadat infra punctum E, ſed vel ſupra, vel congruat puncto E: figuræ itaque A B C circumſcribatur figura quædam ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum, cuius centrum



grauitatis, quod ſit G, ſit propinquius D puncto, quàm punctum E, ac propterea propinquius, quàm punctum F, centrum grauitatis figuræ primo circumſcriptæ. Rurſus multiplicatis cylindris, vel cylindri portionibus, vel paral-

lelo-

lelogrammis circumſcribatur figuræ A B C, altera tertia figura, quemadmodum diximus in præcedenti, cuius centrum grauitatis H, in linea G D cadat & ſit minor proportio reſidui huius tertiæ figuræ circumſcriptæ ipſi A B C, ad figuram A B C, quàm F G ad G D. Multo ergo minor proportio erit dicti reſidui ad figuram A B C quàm F H ad H D, fiat igitur vt prædictum reſiduum ad figuram A B C, ita ex contraria parte F H ad H D K; prædicti igitur reſidui centrum grauitatis erit K, extra ipſius terminos, quod fieri non poteſt: Non igitur F centrum grauitatis figuræ A B C cadit in puncto E, nec ſupra; ergo infra punctum E: & ponitur E centrum grauitatis cuiuslibet figuræ ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum quo modo diximus ipſi A B C circumſcriptæ. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XXXI.

Omni prædictæ figuræ figura quædam ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinum circumſcribi poteſt, cuius centri grauitatis diſtantia à prædictæ figuræ centro grauitatis ſit minor quantacunque longitudine propoſita.



Sit figura A B C in alterã partem deficiẽs ſupradicta, cuius centrum grauitatis F, propoſita autem quantacũque lõgitudine minor ſit F G ipſius B F. Dico figuræ A B C figuram

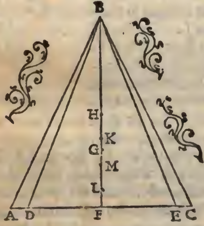
ram ex cylindris vel cylindri portionibus, vel parallelogrã-mis æqualium altitudinũ circumſcribi poſſe, cuius centrum grauitatis ſit propinquius puncto F, quàm punctum G: figuræ enim A B C figura, qualem diximus circumſcribatur, cuius reſiduum dempta figura A B C, ad figuram A B C minorem habeat proportionem, quàm F G, ad G B, ſit autem figuræ circumſcriptæ centrum grauitatis K, nempe in axe, vel diametro B D. Dico lineam F K minorem eſſe quàm F G, atque adeo longitudine propoſita. Quoniam enim F eſt centrum grauitatis figuræ A B C, erit centrum grauitatis K, figuræ circumſcriptæ ipſi A B C propinquius termino B, quàm punctum F, ſed centrum grauitatis figuræ A B C quòd eſt F, & figuræ circumſcriptæ, quod eſt K & eius reſidui dempta figura A B C ſunt in communi axe, vel diametro B D; erit igitur dicti reſidui in linea B K, centrum grauitatis, quod ſit H. Minor autem proportio eſt prædicti reſidui ad figuram A B C, hoc eſt ipſius F K ad K H, quàm F G ad G B, & multo minor, quàm F G ad G H; & componendo minor proportio F H ad H K, quàm F H ad H G; ergo K H maior erit, quàm G H; reliqua igitur F K minor, quàm F G atque adeo longitudine propoſita. Fieri ergo poteſt, quod proponebatur.



PROPOSITIO XXXII.

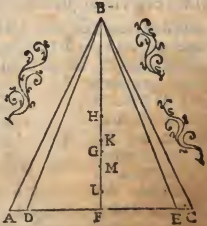
Si duarum prædictarum figurarum circa communem axim, vel diametrum, vel alterius diametrum alterius axim, baſes, & quotcumque ſectiones quales diximus, binæ in eodem plano fuerint proportionales; idem punctum in diametro, vel axe erit vtriuſque centrum grauitatis.

Sint duæ prædictæ figuræ A B C, D B E, circa eandem diametrum, vel axim B F. figuræ autem A B C ſit centrum grauitatis G, nempe in linea B F. Dico G eſſe centrum grauitatis figuræ D B E. ſi enim non eſt, ſit aliud punctum H, quod cadat primo ſupra punctum G. Figuræ igitur A B C, figura circumſcribatur qualem diximus ex cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis æqualium altitudinũ cuius centri grauitatis K diſtantia à



centro G, figuræ A B C ſit minor quàm recta G H: & figuræ D B E, figura circumſcribatur ex cylindris, vel cylindri portionibus vel parallelogrammis æqualium altitudinum, multitudine æqualium ijs, ex quibus conſtat ipſi A B C, figura

figura circumſcripta, quæ cum prædictis circa figuram A B C: erunt bina ſumpto ordine à puncto B, in eadem proportione inter eadem plana parallela, vel rectas parallelas cõſiſtentia, propter ſectiones, ideſt baſes, & æquales altitudines: binorum autem quorumque homologorum idem erit in linea B F, centrum grauitatis: punctum igitur K, centrum grauitatis figuræ ipſi A B C circumſcriptæ, idem erit figuræ ipſi D B E, circumſcriptæ centrum grauitatis: cadit autē infra centrum grauitatis H figuræ D B E, quod eſt abſurdum. Non igitur centrum grauitatis figuræ D B E, cadit ſupra punctum G. Sed cadat infra, vt in puncto L. Rurſus igitur figuræ D B E figura, qualem diximus circumſcripta, cuius centrum grauitatis M, ſit propinquius centro L,



quàm punctum G, figuræ A B C altera qualem diximus figura circumſcribatur, cuius centrum grauitatis ſit idem punctum M, quod fieri poſſe conſtat ex ſuperioribus. Sed G ponitur centrum grauitatis figuræ A B C; ergo centrum grauitatis figuræ ipſi A B C, circumſcriptæ erit propinquius baſi & puncto F, quàm figuræ A B C centrum grauitatis, quod fieri non poteſt. Non igitur figuræ D B E centrum grauitatis cadit infra punctum G. Sed neque ſupra; punctum igitur G erit commune duarum figurarum A B C, D B E, centrum grauitatis. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

Manifeſtum eſt autem omnia proximis quatuor propoſitionibus oſtẽſa de figura circa axim, vel diametrum in alteram partem deficienti, eadem ijſdem rationibus oſtenſa remanere de compoſito ex duabus figuris circa communem axim vel diametrum in alteram partem deficientibus, tam per ſe conſiderato, quàm ad alteram figuram circa eundem axim, vel diametrum cum prædicto compoſito, in alteram partem deficiens, ac ſi eſſent duæ tantummodo dictæ figuræ, quales in præcedenti proxima inter ſe comparauimus; manente ſemper illa conditione, quàm de ſectionibus in vigeſima huius diximus. Tantum aduertendum eſt, vt pro ſectionibus, dicamus compoſita ex binis ſectionibus (quæ ſcilicet fiunt ab eodem plano, vel eadem recta linea) cum de prædicto compoſito ſit ſermo: & in demonſtratione, pro cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis, compoſita ex binis cylindris, vel cylindri portionibus, vel parallelogrammis (quæ ſcilicet ſunt inter eadem plana parallela, vel lineas parallelas, & circa eundem axim, vel diametrum totius vel diametri, vel axis partem) ſicut & pro figura compoſitum ex duabus dictis figuris: pro reſiduo, compoſitum ex reſiduis. Nam cum vtriuſque reſidui figu-

figurarum duobus prædictis figuris vnum quid componentibus,& circa eundem axim, vel diametrum exiſtentibus, qua ratione diximus, circumſcriptarum,centra grauitatis ſint in diametro,vel axe; etiam compoſiti ex ijs duobus reſiduis (vt in priori libro generaliter demonſtrauimus, centrum grauitatis erit in eadem diametro, vel axe: vnde vim habent proximæ quatuor antecedentes demonſtrationes, exemplum erit in demonſtratione trigeſimæ quartæ huius.

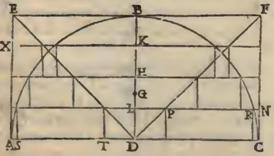
PROPOSITIO XXXIII.

Hemiſphærij centrum grauitatis eſt punctum illud in quo axis ſic diuiditur,vt pars,quæ ad verticem ſit ad reliquam vt quinque ad tria.

Eſto hemiſphærium A B C cuius vertex B, axis B D. ſit autem B D ſectus in G puncto,ita vt pars B G ad G D ſit vt quinque ad tria. Dico G eſse centrum grauitatis hemiſphærij A B C. Abſcindatur enim B K ipſius B D pars quarta: & ſuper baſim eandem hemiſphærij eundemque axim B D cylindrus A F conſiſtat, & conus intelligatur E D F, cuius vertex D, baſis autem circulus circulo A C oppoſitus, cuius diameter E B F. Sectoque axe B D bifariam in puncto H, & ſingulis eius partibus rurſus bifariam, quoad B D ſecta ſit in partes æquales cuiuſcumque libuerit numeri paris, tranſeant per puncta ſectionum plana quædam baſi A C parallela, & ſecantia, hemiſphærium, conum, & cylindrum, quorum omnes ſectiones erunt circuli, terni in eodem plano ad aliam atque

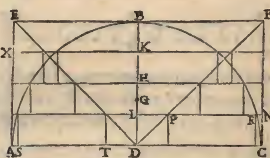
aliam

aliam trium harum figurarum pertinentes. Quod ſi prætereà factæ ſectiones hemiſphærij A B C à cylindri A F ſectionibus, circuli à circulis concentricis auferri intelligantur; reliquæ totidem erunt ſectiones reliquæ figuræ ſolidæ, dempto A B C hemiſphærio ex toto A F cylindro, circuli deficientes circulis concentricis, hoc eſt prædictis A B C hemiſphærij ſectionibus prout inter ſe reſpondent. Nunc ſuper ſectiones hemiſphærij A B C, & coni E D F cylindris conſtitutis circa axes, quæ ſunt ſegmenta æqualia axis B D, intelligantur duæ figuræ ex cylindris æqualium altitudinum, altera inſcripta hemiſphærio A B C, altera cono E D F circumſcripta.



Si igitur à toto A F cylindro auferatur figura, quæ inſcripta eſt hemiſphærio A B C, relinquetur figura quædam ex cylindris circa prædictos axes, vt ſunt B K, K H, H L, L D, deficientibus ijs cylindris, ex quibus conſtat figura inſcripta hemiſphærio A B C, & vno integro ſupremo X F cylindro, circumſcripta reſiduo A F cylindri dempto A B C hemiſphærio, circumſcriptione interna: talis autem figuræ circumſcriptæ centrum grauitatis, per ea, quæ in primo libro, erit in axe B D, quemadmodum & aliarum duarum figurarum ex cylindris, quarum altera inſcripta eſt hemiſphærio A B C, altera cono E D F circumſcripta.

Quoniam igitur quo exceſsu hemiſphærium A B C ſuperat ex cylindris figuram ſibi inſcriptam, eodem figura circumſcripta reliquo cylindri A F, dempto A B C hemiſphærio, ſuperat ipſum reſiduum; figura autem inſcripta hemiſphærio A B C poteſt eſſe eiuſmodi, quæ ab hemiſphærio deficiat minori defectu quantacumque magnitudine propoſita; poterit figura, quæ prædicto reſiduo circumſcripta eſt eſſe talis, quæ ipſum reſiduum ſuperet minori exceſsu quantacumque magnitudine propoſita. Rurſus, quia quemadmodum cylindrus A N infimus deficiens cylindro S R, æqualis eſt cylindro T P, ex ſupe-



rioribus, ita vnuſquiſque aliorum cylindrorum deficientium cylindris, qui ſunt in hemiſphærio, ex quibus cylindris deficientibus conſtat dicto reſiduo figura circumſcripta, æqualis eſt cylindrorum circa conum E D F, ei, qui cum ipſo eſt inter eadem plena parallela, & circa eundem axem; erunt omnes cylindri circa conum E D F, in eadem proportione cum prædictis cylindris deficientibus, circa prædictum reſiduum, ſi bini ſumantur inter eadem plana parallela, & circa eundem axem. Quemadmodum igitur omnium cylindrorum, qui circa conum E D F minor eſt proportio primi ad verticem D, ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium, & ſecundi ad tertium, quàm ter-

tij

tij ad quartum, & ſic ſemper deinceps vſque ad vltimum X F (duplicatæ enim ſunt talium cylindrorum rationes earum, quas inter ſe habent diametri æqualibus exceſsibus differentes circulorum, qui ſunt ſectiones coni, & baſes cylindrorum, ex quibus conſtat figura cono E D F circumſcripta, ſumpta progreſſione proportionum eodem ordine gradatim à minima diametro vſque ad maximam E F) ita erit cylindrorum deficientium, ex quibus conſtat figura circumſcripta reliquo cylindri A F, dempto A B C hemiſphærio, minimi, cuius axis D L ad ſecundum minor proportio, quàm ſecundi ad tertium, & ſic deinceps, vſque ad maximũ X F, communiter ad conum E D F, & prædictum reſiduum pertinentem, ſicut & eorum baſes circuli deficientes, quæ ſunt dicti reſidui ſectiones. Cum igitur tam maximi cylindri X F communis, quàm binorum quorumque reliquorum cylindrorum circa conum E D F, & prædictum reſiduum inter eadem plana parallela conſiſtentium, quorum axis communis in B D, commune centrum grauitatis in axe B D exiſtat, erit ex antecedenti punctum K, quod pono centrum grauitatis coni E D F, idem reſidui ex cylindro A F, dempto A B C, hemiſphærio centrum grauitatis. Quoniam igitur quarum partium eſt octo axis B D talium eſt B G quinque, & B K duarum (ponimus enim nunc K coni E D F centrum grauitatis) qualium eſt B D octo, talium erit G K trium: ſed K H eſt æqualis B K; qualium igitur partium eſt G K trium, talium erit K H duarum, taliſque vna G H; dupla igitur K H ipſius G H: ſed A B C hemiſphærium duplum eſt prædicti reſidui, cum ſit cylindri A F, ſubſeſquialterum; vt igitur eſt hemiſphæriũ A B C, ad prædictum reſiduum, ita ex contraria parte erit lõgitudo K H, ad longitudinem G H: ſed H eſt centrum grauitatis totius cylindri A F & K, prædicti reſidui dempto A B C hemiſphærio; ergo A B C hemiſphærij centrum grauitatis erit G. Quod demonſtrandum erat.

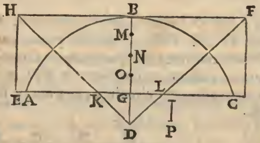
H 2 PRO.

PROPOSITIO XXXIV.

Omnis minoris portionis ſphæræ centrum grauitatis eſt in axe primum bifariam ſecto: deinde ſecundum centrum grauitatis fruſti circa eundem axim, abſciſſi à cono verticem habente centrum ſphæræ; in eo puncto, in quo dimidius axis portionis baſim attingens ſic diuiditur, vt pars duabus prædictis ſectionibus intercepta ſit ad eam, quæ inter ſecundam, & tertiam ſectionem interijcitur, vt exceſſus, quo tripla ſemidiametri ſphæræ, cuius eſt prædicta portio, ſuperat tres deinceps proportionales, quarum maxima eſt ſphæræ ſemidiameter, media autem, quæ inter centra ſphæræ, & baſis portionis interijcitur; ad ſemidiametri ſphæræ triplam.

Sit minor portio A B C, ſphæræ, cuius centrum D, ſemidiameter B D, in qua axis portionis ſit B G, baſis autem circulus, cuius diameter A C: & circa axim B D deſcriptus eſto conus H D F, cuius baſis circulus F H tangens portionem in B puncto ſit æqualis circulo maximo, & fruſtum coni H D F abſciſſum vna cum portione A B C ſit K H F L, & vt B D ad D G, ita fiat D G ad P: ſectoque axe B G bifariam in puncto N, fiat vt exceſſus, quo tripla ipſius B D ſuperat tres B D, D G, P, tanquam vnam, ita N M, ad M N O. Dico portionis A B C centrum grauitatis eſse O. Nam circa axim B G, ſuper baſim F H ſtet cylindrus E F, cuius centrum

trum grauitatis erit N, reliqui autem eius dempta A B C portione centrum grauitatis M commune fruſto K L F H, vt colligitur ex demonſtratione antecedentis. Quoniam igitur eſt vt exceſsus, quo tripla ipſius B D ſuperat tres B D, D G, P tanquam vnam, ad ipſius B D



triplam, hoc eſt vt N M ad M O, ita portio A B C ad E F cylindrum, & diuidendo vt M N ad N O, ita portio A B C ad reliquum cylindri E F; & N eſt cylindri E F, & M prædicti reſidui centrum grauitatis; erit reliquæ portionis A B C centrum grauitatis O. Quod demonſtrandum erat.

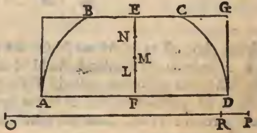
PROPOSITIO XXXV.

Omnis portionis ſphæræ abſciſſæ duobus planis parallelis, altero per centrum acto, centrum grauitatis eſt in axe primum bifariam ſecto: deinde ſumpta ad minorem baſim quarta parte axis portionis; in eo puncto, in quo dimidius axis minorem baſim attingens ſic diuiditur, vt pars duabus prædictis ſectionibus intercepta ſit ad eam,

quæ

quæ inter ſecundam, & vltimam ſectionem interijcitur, vt exceſſus, quo maior extrema ad ſphæræ ſemidiametrum, & axim portionis ſuperat tertiam partem axis portionis; ad maiorem extremam antedictam.

Sit portio A B C D ſphæræ, cuius centrum F: axis autem portionis ſit E F abſciſsæ duobus planis parallelis, quorum alterum tranſiens per punctum F faciat ſectionum circulum maximum, cuius diameter A D, reliquam autem ſectionem minorem circulum, quæ minor baſis dicitur, cuius diameter B C: & vt eſt E F ad A D, ita fiat A D ad O P, cuius P R, ſit æqualis tertiæ parti axis E F. Et ſecta E F bifariam in puncto M, & poſita E N ipſius E F quarta parte, fiat vt R O ad O P, ita M N ad N L. Dico L eſſe centrum grauitatis portionis A B C D. Nam circa axim E F ſuper circulum maximum A D deſcribatur cylindrus A G, cuius centrum grauitatis erit M: reliqui autem ex cylindro A G dempta A B C D portione centrum grauitatis N. Quoniam igitur eſt vt R O ad O P, hoc eſt vt M N ad N L, ita portio A B C D ad reliquum cylindri A G, & diuidendo vt N M ad M L, ita portio A B C D ad reliquum cylindri A G: & cylindri A G eſt N, prædicti autem reſidui centrum grauitatis M; erit reliquæ portionis A B C D centrum grauitatis L. Quod demonſtrandũ erat.



PRO-

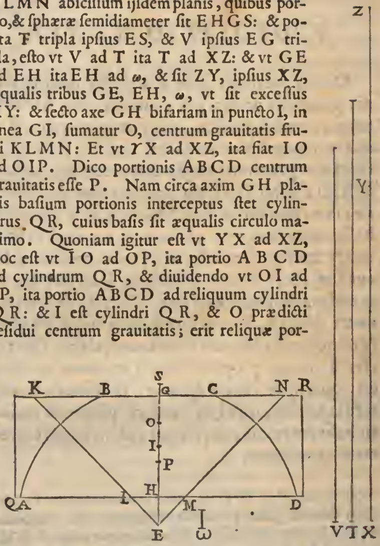
PROPOSITIO XXXVI.

Omnis portionis ſphæræ abſciſſæ duobus planis parallelis neutro per centrum acto, nec centrum intercipientibus, centrum grauitatis eſt in axe primum bifariam ſecto: deinde ſecundum centrum grauitatis fruſti circa eundem axim, abſciſſi à cono verticem habente centrum ſphæræ; in eo puncto in quo dimidius axis maiorem baſim attingens ſic diuiditur, vt pars duabus prædictis ſectionibus finita ſit ad eam, quæ inter ſecundam, & vltimam ſectionem interijcitur, vt exceſſus, quo maior extrema ad triplas & ſemidiametri ſphæræ, & eius quæ inter centra ſphæræ, & minorem baſim portionis interijcitur, ſuperat tres deinceps proportionales, quarum maxima eſt, quæ inter centra ſphæræ, & minoris baſis, media autem, quæ inter centra ſphæræ, & maioris baſis portionis interijcitur; ad maiorem extremam antedictam.

Sit portio A B C D, ſphæræ, cuius centrum E, abſciſsa duobus planis parallelis, neutro per E tranſeunte, nec E intercipientibus: axis autem portionis ſit G H, maior baſis circulus, cuius diameter A D, minor cuius diameter B C: producta autem G H vſque in E intelligatur coni K E N rectanguli, cuius axis E G, fruſtum

KLMN

KLMN abſciſſum iiſdem planis, quibus portio, & ſphæræ ſemidiameter ſit EHGS: & poſita T tripla ipſius ES, & V ipſius EG tripla, eſto vt V ad T ita T ad XZ: & vt GE ad EH ita EH ad ω, & ſit ZY, ipſius XZ, æqualis tribus GE, EH, ω, vt ſit exceſſus XY: & ſecto axe GH bifariam in puncto I, in linea GI, ſumatur O, centrum grauitatis fruſti KLMN: Et vt YX ad XZ, ita fiat IO ad OIP. Dico portionis ABCD centrum grauitatis eſſe P. Nam circa axim GH planis baſium portionis interceptus ſtet cylindrus QR, cuius baſis ſit æqualis circulo maximo. Quoniam igitur eſt vt YX ad XZ, hoc eſt vt IO ad OP, ita portio ABCD ad cylindrum QR, & diuidendo vt OI ad IP, ita portio ABCD ad reliquum cylindri QR: & I eſt cylindri QR, & O prædicti reſidui centrum grauitatis; erit reliquæ por-



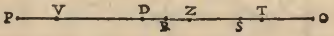
tionis ABCD centrum grauitatis P. Quod demonſtrandum erat.

LEM-

LEMMA.

Sit data recta PO, & in ea punctum D, & punctum quoddam R in ipſa DO, ita vt VD ipſius PD, ad DT ipſius DO, ſit vt PD ad DO: ſit autem maior proportio PS ad SO, quàm VR ad RT. Dico OS, minorem eſſe quàm OR.

Fiat enim vt PS, ad SO, ita VZ ad ZT; maior igitur erit proportio VZ ad ZT, quàm VR, ad RT: & componendo maior proportio VT, ad TZ, quàm

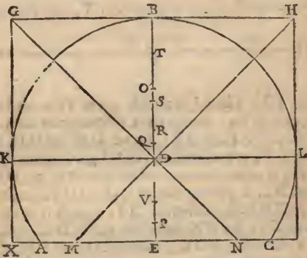


VT ad TR; minor igitur TZ quàm TR, ideſt maior DZ quàm DR. Rurſus quia componendo eſt vt PO ad OS, ita VT ad TZ: ſed vt DO ad OP, ita eſt DT ad TV; erit ex æquali, vt DO ad OS, ita DT ad TZ; & per conuerſionem rationis, vt OD ad DS, ita TD ad DZ: & permutando, vt DO ad DT, ita DS ad DZ: ſed DO, eſt maior quàm DT, ergo & DS, erit maior quàm DZ: ſed DZ maior erat quàm DR; multo ergo DS maior quàm DR, vnde minor erit OS quàm OR. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXVII.

Si datæ maiori ſphæræ portioni cylindrus circumſcribatur circa eundem axim portionis; centrum grauitatis reliquæ figuræ ex cylindro circũſcripto ablata portione, propinquius erit vertici portionis, quàm centrum grauitatis portionis.

Sit ſphæræ cuius centrum D maior portio A B C, cuius axis B E, baſis circulus cuius diameter A C, & portioni A B C, cylindro X H circa axim B E circumſcripto vt ſupra fecimus: quoniam tam portionis A B C, quàm cylindri X H, centrum grauitatis eſt in axe B E; erit reliqui ex cylindro X H, in axe B E centrum grauitatis. ſint in axe B E centra grauitatis Q portionis A B C, & S prædicti reſidui. Dico eſſe punctum S vertici B propinquius



quàm punctum Q. Per centrum enim D tranſiens planum ad axim B E erectum ſecet cylindrum X H, & portionem A B C in duos cylindros K H, X L, & hemiſphærium K B L, & portionem A K L C, ſectio autem circulus maximus eſto ille cuius diameter K L: & duo coni rectanguli circa axes B D, D E, vertice D communi deſcribantur G D H, M D N, quorum alterius baſis G H communis erit cylindro X H: alterius autem M D N, minor quàm eiuſdem cylindri X H, baſis G H. Deinde ſecta

B E

B E biſariam in puncto R, ſecentur B D, in puncto T, & D E, in puncto V biſariam; & ſumatur B O ipſius B D pars quarta, necnon E P pars quarta ipſius D E, primum itaque quoniam E R eſt maior quàm E D, erit punctum R, in ſegmento B D. Quoniam igitur ex ſupra oſtenſis O eſt centrum grauitatis commune cono D G H, & reliquo cylindri *K H* dempto A B C hemiſphærio: & eadem ratione punctum P, cum ſit centrum grauitatis coni M D N, erit idem centrum grauitatis reliqui ex cylindro X L dempta A K L C portione: eſt autem reliquum cylindri K H dempto K B L hemiſphærio, æquale cono D G H: qua ratione & reliquum cylindri X L, dempta A K L C portione, æquale eſt cono M D N; cum igitur S ſit centrum grauitatis totius reliqui ex toto cylindro X H, dempta A B C portione, erit idem S, centrum grauitatis compoſiti ex conis G D H, M D L: ſunt autem horum conorum centra grauitatis O, P; vt igitur conus G D H, ad conum M D N, ita erit P S, ad S O: ſed coni G D H ad ſimilem ipſi conum M D N triplicata eſt proportio axis B D, ad axim B E, hoc eſt cylindri K H ad cylindrum X L; maior igitur proportio erit P S ad S O, quam cylindri K H ad cylindrum X L: ſed vt cylindrus K H, ad cylindrum X L, ita eſt V R ad R T, ob centra grauitatis V, R, T, maior igitur proportio erit P S ad S O, quàm V R ad R T: ſed eiuſdem P O eſt vt P D ad D O, ita V D ad D T, ob ſectiones axium proportionales; punctum igitur S propinquius eſt puncto O, quàm punctum R, per Lemma. Quare & S termino B propinquius quàm punctum R: ſed R eſt centrum grauitatis totius cylindri X H: & S reliqui ex cylindro X H dempta A B C portione; igitur Q reliquæ portionis A B C, centrum grauitatis erit in linea E R, atque ideo à puncto B remotius quàm punctum S. Quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

Manifeſtum eſt autem ex demonſtratione theorematis, omnis reſidui ex cylindro datæ maiori ſphæræ portioni circumſcripto circa eundem axim portionis, cuius baſis æqualis circulo maximo, centrum grauitatis eſſe in axe, abſciſſa primum quarta parte ad verticem portionis terminata ſegmenti axis portionis, quod centro ſphæræ, & vertice portionis, & quarta parte eius quod centro ſphæræ, & baſi portionis terminatur ad baſim terminata; in eo puncto, in quo ſegmētum axis portionis duabus prædictis ſectionibus finitum ſic diuiditur, vt ſegmentum propinquius baſi ſit ad reliquum, vt cubus ſegmenti axis portionis centro ſphæræ, & vertice portionis terminati, ad cubum reliqui, quod portionis baſim attingit: ſiquidem cubi triplicatam inter ſe habent laterum proportionem. Simul illud manifeſtum eſt, hoc idem eadem ratione poſſe demonſtrari de centro grauitatis reliqui ex cylindro dempta ſphæræ portione abſciſſa duobus planis parallelis centrum ſphæræ intercipientibus, ita vt axis portionis à centro ſphæræ in partes inæquales diuidatur, cuius cylindri circumſcripti ſit idem axis, qui & portionis, baſis autem æqualis circulo maximo. Similiter enim deſcriptis duobus conis rectangulis

verticem

verticem habentibus communem centrum ſphæræ, baſes autem minores baſibus oppoſitis cylindri circumſcripti æqualibus circulo maximo, ſumentes pro vertice minorem baſim, pro baſi, maiorem baſim portionis immotis reliquis propoſitum oſtenderemus.

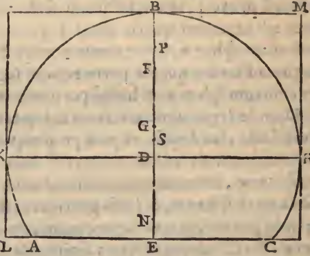
PROPOSITIO XXXVIII.

Omnis maioris portionis ſphæræ centrum grauitatis eſt in axe primum bifariam ſecto: deinde ſumpta ad verticem quarta parte ſegmenti axis, quod centro ſphæræ, & portionis vertice finitur: itemque ad baſim quarta parte reliqui ſegmenti inter centrum ſphæræ, & baſim portionis interiecti. Deinde ſegmento axis, inter eas quartas partes interiecto, ita diuiſo, vt pars propinquior baſi ſit ad reliquam vt cubus ſegmenti axis, quod cẽtro ſphæræ, & vertice portionis, ad cubum eius quod centris ſphæræ, & baſis portionis terminatur; in eo puncto, in quo ſegmentum axis centro ſphæræ, & ſectione penultima finitum ſic diuiditur, vt pars prima & penultima ſectione terminata ſit ad totam vltima & penultima ſectione terminatam, vt exceſſus, quo ſegmentum axis portionis inter centrum, & baſim portionis interiectum ſuperat tertiam partem minoris extremæ maiori poſita dicto axis ſegmento in proportione ſemidia-

meui

metri ſphæræ ad prædictum ſegmentum, vnà cum ſubſeſquialtera reliqui ſegmenti, ad axim portionis.

Sit maior portio A B C ſphæræ, cuius centrum D, diameter K H, axis autem portionis ſit B E, baſis circulus, cuius diameter A C, & ſit axis B E primum biſariam ſectus in puncto G: ſumptaque ipſius B D, quarta parte B P, itemque ipſius D E quarta parte E N, ſecetur intercecta P N, ita in puncto F, vt N F, ad F P, ſit vt cubus ex B D ad cubum ex D E; punctum igitur F, ex præcedenti



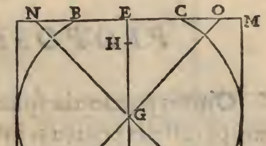
corollario erit centrum grauitatis reliqui ex cylindro L M portioni A B C, vt in antecedenti circumſcripto. Quoniam igitur & prædicti reſidui, ex antecedenti, & cylindri L M centra grauitatis ſunt in axe B E, erit & portionis A B C in axe B E centrum grauitatis, quod ſit S: manifeſtum eſt igitur punctum S, cadere ſupra centrum D in linea B D, minori ablata ſphæræ portione, cuius baſis circulus

culus A C: centrum autem F propinquius eſſe puncto B, quàm centrum S, conſtat ex præcedenti: quare centrum G, totius cylindri L M inter puncta F, S cadet. Dico G F ad F S eſſe vt exceſſus, quo recta D E ſuperat tertiam partem minoris extremæ maiori poſita ipſa D E in proportione continua ipſius D H ad D E vnà cum ſubſeſquialtera ipſius B D, ad axim B E, ita G F ad F S. Quoniam enim portio A B C ad cylindrum L M eſt vt prædictus exceſſus vnà cum ſubſeſquialtera ipſius B D ad axim B E: & vt portio A B C ad L M cylindrum, ita eſt G F ad F S, ob centra grauitatis F, G; erit vt prædictus exceſſus vnà cum ſubſeſquialtera ipſius B D ad axim B E, ita G F ad F S. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXIX.

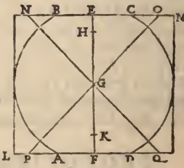
Omnis portionis ſphæræ abſciſſæ duobus planis parallelis centrum intercipientibus, & à centro æqualiter diſtantibus, centrum grauitatis eſt in medio axis, vel idem, quod centrum ſphæræ.

Sit portio A B C D ſphæræ, cuius centrum G, abciſſa duobus planis parallelis centrum G intercipientibus, & æquè ab eo diſtantibus: ſectiones erunt circuli minores, quorum diametri ſint A D, B C centra autem F, E, quibus axis portionis terminabitur, eritque ad plana vtriuſque circuli perpendicularis tranſiens per centrum G: & quia illa plana



à cen-

à centro G, æquè diſtant, erit E G, æqualis G F. Dico portionis A B C D centrum grauitatis eſſe G. Deſcripta enim figura, vt ſupra fecimus, intelligantur duo coni rectanguli G N O, G P Q, vertice G communi, axibus autem eorum E G, G F: & cylindrus L M, portioni circumſcriptus circa eundem axim E F, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo: & ſumatur E H ipſius E G, pars quarta, itemque F K, pars quarta ipſius F G. Quoniam igitur conorum G N O, P G O, axes F G, G H, ſunt æquales, reliquæ K G, G H, æquales erunt; centra autem grauitatis conorum ſunt K, H; punctum igitur G eſt centrum grauitatis compoſiti ex duobus conis æqualibus G N O, G P Q, hoc eſt reliqui ex cylindro L M, dempta A B C D portione, ex ante demonſtratis: ſed idem G eſt centrum grauitatis totius cylindri L M; reliquæ igitur A B C D, portionis centrum grauitatis erit G. Quod demonſtrandum erat.

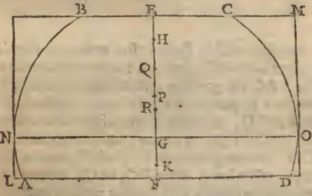


PROPOSITIO XL.

Omnis portionis ſphæræ abſciſſæ duobus planis parallelis centrum intercipientibus, & à centro non æqualiter diſtantibus centrum grauitatis eſt in axe primum bifariam ſecto: Deinde ſumpta ad minorem baſim portionis quarta parte ſegmenti axis, quod minorem baſim attingit: & ad maio-

rem

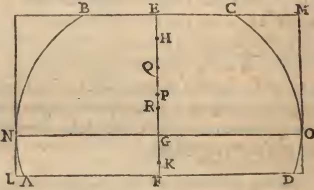
rem baſim quarta parte reliqui ſegmenti axis eorum, quæ à centro ſphæræ fiunt: Deinde recta inter has quartas partes interiecta ita diuiſa, vt pars maiori baſi propinquior ſit ad reliquam vt cubus ſegmenti axis inter ſphæræ centrum, & minorem baſim, ad cubum eius, quod inter ſphæræ centrum, & maiorem baſim portionis interijcitur; in eo puncto, in quo ſegmentum axis centro ſphæræ, & penultima ſectione terminatum ſic diuiditur, vt pars quæ penultima, & prima ſectione terminatur ſit ad totam vltima, & penultima ſectione terminatam, vt ad axim portionis eſt exceſſus, quo idem axis portionis ſuperat tertiã partem compoſitæ ex duabus minoribus extremis, maioribus poſitis duobus axis ſegmentis, quæ fiunt à centro ſphæræ in rationibus ſemidiametri ſphæræ ad prædicta ſegmenta.



Sit portio A B C D ſphæræ, cuius centrum G, abſciſſa duobus planis parallelis centrum G intercipientibus, &

K ab eo

ab eo non æqualiter diſtantibus: & axis portionis ſit E F, qui per centrum G tranſibit, vtpote parallelorum circulorum centra iungens: cumque eorum vtrumque ſit à centro non æqualiter diſtantium perpendicularis, erunt eius ſegmenta E G, G F, inæqualia. Eſto E G, maius: ſectoque axe E F biſariam in puncto P, ſumptisque ipſarum E G, G F, quartis partibus E H, F K, ſecetur intercepta K H, in puncto Q, ita vt K Q, ad Q H, ſit vt cubus ex E G, ad cubum ex G F, & portionis A B C D, ſit centrum grauitatis R: quod quidem cum punctis P, Q, eſſe in axe



E F: & cylindro L M, ſuper baſim æqualem circulo maximo circa axim E F, portioni circumſcripto, reliqui eius dempta A B C D, portione centrum grauitatis eſse Q, & propinquius E puncto, quàm centrum grauitatis R portionis A B C D, manifeſtum eſt ex ſupra demonſtratis de maioris portionis ſphæræ centro grauitatis: portionis autem A B C D centrum grauitatis R eſse in ſegmento E G ſequitur ex antecedente. Dico P Q ad Q R eſse vt ad axim E F exceſsus, quo axis E F ſuperat tertiam partem compoſitæ ex duabus minoribus extremis altera reſpondente maiori extremæ E G in proportione continua ipſius N G

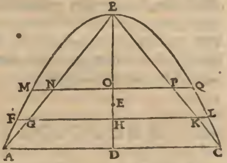
ad G E

ad G E, altera maiori extremæ F G in proportione continua ipſius N G ad G F. Quoniam enim ob centra grauitatis Q P R eſt vt Q P ad P R, ita portio A B C D ad reliquum cylindri L M, erit componendo, & per conuerſionem rationis, & conuertendo, vt P Q ad Q R, ita portio A B C D ad L M cylindrum: ſed portio A B C D ad L M cylindrum eſt vt prædictus exceſſus ad axim E F; vt igitur prædictus exceſſus ad axim E F, ita eſt P Q ad Q R. Quod demonſtrandum erat.

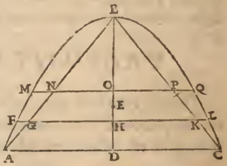
PROPOSITIO XLI.

Omnis conoidis parabolici centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur vt pars, quæ eſt ad verticem ſit dupla reliquæ.

Sit conoides parabolicum A B C, cuius vertex B, axis autem B D ſectus in puncto E ita vt E B ſit ipſius E D dupla. Dico E eſse centrum grauitatis conoidis A B C. Nam in ſectione per axim parabola A B C, cuius diameter erit B D, deſcribatur triangulum A B C; ſumptisque ipſius B D æqualibus D H, H O, per puncta H, O, ſecentur vnà parabola & triangulum A B C duabus rectis F G H K L, M N O P Q: & per eas rectas ſecetur conoides A B C planis baſi parallelis, factæ autem ſectiones erunt circuli circa F L, M Q, & in parabola



A B C tres ad diametrum ordinatim applicatæ A D, F H, M O. Quoniam igitur tres rectæ O B, B H, B D ſeſe æqualiter excedunt, quarum minima B O, maxima eſt B D, minor erit proportio B O ad B H, quàm B H ad B D; hoc eſt N P ad G K, quàm G K ad A C. ſed vt O B ad B H hoc eſt N O ad G H, vel N P ad G K ita eſt quadratum M O ad quadratum F H, hoc eſt conoidis ſectionum circulus M Q ad circulum F L: eademque ratione vt G K ad A C ita circulus F L ad circulum A C; minor igitur proportio erit circuli M Q ad circulum F L quàm



circuli F L ad circulum A C. Similiter autem oſtenderemus ternas quaslibet alias ita factas ſectiones trianguli, & parabolæ A B C inter ſe & baſi parallelas proportionales eſse, & minorem proportionem vtrobique minimæ ad mediam, quàm mediæ ad maximam. Sed E eſt centrum grauitatis trianguli A B C, igitur per vigeſimamtertiam huius centrum grauitatis conoidis A B C erit idem E. Quod demonſtrandum erat,

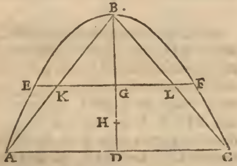
PROPOSITIO XLII.

Omnis fruſti conoidis parabolici centrum grauitatis axim ita diuidit, vt pars, quæ minorem baſim attingit ſit ad reliquam; vt duplum maioris

baſis

baſis vnà cum minori, ad duplum minoris, vnà cum maiori.

Sit conoidis parabolici A B C, cuius axis B D fruſtum A E F C, eius maior baſis circulus, cuius diameter A C, minor, cuius diameter E F: in eadem parabola per axem, axis autẽ D G, in quo fruſti A E F C ſit centrum grauitatis H. Dico eſſe vt duplum circuli A C, vnà cum circulo E F, ad duplum circuli E F vna cum circulo A C, ita G H, ad H D. Iungãtur enim rectæ A K B, B L C. Quoniam igitur qua ratione oſtendimus conoides, & triangulum A B C, commune habere in linea B D centrum grauitatis, eadẽ prorſus remanet demonſtratum, fruſti



A E F C centrũ grauitatis H, idem eſse quod trapezij A K F C; erit duarum parallelarum A C, K L vt dupla ipſius A C, vnà cum K L, ad duplam ipſius K L, vnà cum A C ita G H ad H D: ſecat enim D G ipſas A C, K L bifariam. Sed vt A C ad K L ita eſt circulus A C ad circulum E F, ex demonſtratione antecedentis, hoc eſt vt dupla ipſius A C vnà cum K L ad duplam ipſius K L vnà cum A C, ita duplum circuli A C vna cum circulo K L ad duplum circuli K L vnà cum circulo A C; vt igitur eſt duplum circuli A C, vnà cum circulo E F, ad duplum circuli E F, vnà cum circulo A C; ita erit G H ad H D. Quod demonſtrandum erat.

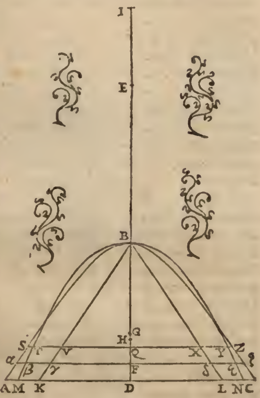
PRO-

PROPOSITIO XLIII.

Omnis conoidis hyperbolici centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo duodecima pars axis ordine quarta ab ea, quæ baſim attingit, ſic diuiditur, vt pars baſi propinquior ſit ad reliquam, vt ſeſquialtera tranſuerſi lateris hyperboles, quæ conoides deſcribit ad axim conoidis.

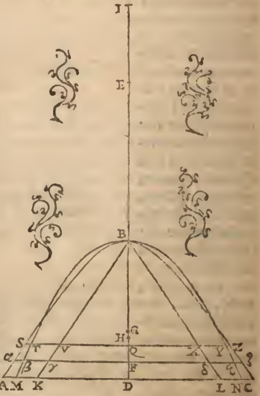
Sit conoides hyperbolicum A B C, cuius vertex B, axis autem B D, qui etiam erit diameter hyperboles; quæ conoides deſcripſit, ad quam rectæ ordinatim applicantur: eiuſdem autem hyperboles tranſuerſum latus ſit E B, cuius ſit ſeſquialtera B E I, & ſumpta D Q quarta parte axis B D, & D G, eiuſdem tertia, qua ratione erit F G duodecima pars axis B D, & ordine quarta ab ea cuius terminus D, fiat vt I B, ad B D, ita Q H, ad H G. Dico conoidis A B C, centrum grauitatis eſſe H. Sumpto enim in linea A D quolibet puncto M, vt eſt E B ad B D longitudine, ita fiat M D, ad D K ipſius A D potentia: & abſcindatur D N, æqualis D M, & D L æqualis D K; ſiue autem ſit D K minor, quàm D M, ſiue maior, ſiue eadem illi; omnibus caſibus communis erit demonſtratio. At per puncta M, N, vertice B, circa diametrum B D, deſcribatur parabola M B N, & triangulum K B L. Manente igitur B D, & circumductis figuris M B N, K B L, deſcribantur conoides parabolicum M B N, & conus K B L, quorum communis axis erit B D, baſes autem circuli, quorum diametri K L, M N, in eodem plano cum baſe conoidis A B C. Rurſus ſecto axe B D bifariam, & ſingulis eius partibus ſemper bifariam in quacnmque

cumque multiplicatione; ſint duæ partes æquales proximæ baſi DF, FQ; & per puncta F Q duo plana baſium plano parallela tres prædictas figuras ſolidas ſecare intelligantur: ſecabunt autem & tres figuras per axim, eruntque ſectiones rectæ lineæ ad diametrum figurarum ordinatim applicatæ propter plana ſecantia parallela: trium autem ſolidorum ſectiones & baſes omnes circuli, terni in ſingulis planis: ac primi quidem ordinis ſint ij, quorum diametri ſunt baſes triũ figurarũ per axim, trianguli ſcilicet, parabolæ, & hyperboles, quæ prædictas figuras ſolidas deſcribunt, rectæ lineæ A C, M N, K L. Secundi verò retento eodem ordine figurarũ tres $\alpha\,\zeta$, $\beta\,\varepsilon$, $\gamma\,\delta$. Tertij denique ordinis SZ, TY, V X.



Quoniam igitur eſt vt E B, ad B D, ità quadratum M D, ad quadratum D K, ideſt conus M B N, ſi deſcribatur eodem vertice B, ad conum K B L. Et vt I B, ad B E, ità eſt conoides M B N, ad conum M B N, in proportione ſcilicet

cet ſeſquialtera; ex æquali erit vt I B, ad B D, ità conoides M B N ad conum K B L: Sed vt I B, ad B D, ità ponitur Q H ad H G; vt igitur conoides M B N, ad conum K B L, ità eſt Q H ad H G. Sed Q eſt centrum grauitatis coni K B L, & G conoidis M B N; compoſiti igitur ex conoide M B N, & cono K B L centrũ grauitatis erit H. Rurſus quoniam tres rectæ lineæ B D, B F, B Q, æqualibus exceſſibus inter ſe differunt, minor erit proportio B Q, ad B F, quàm B F, ad B D, hoc eſt rectanguli E B Q, ad rectangulum E B F, quàm rectanguli E B F, ad rectangulum E B D. Sed quadrati B Q, ad quadratum B F, duplicata eſt proportio lateris B Q ad latus B F: hoc eſt rectanguli E B Q ad rectangulum E B F: & quadrati B F, ad quadratum B D duplicata eius, quæ eſt rectanguli E B F, ad rectangulum E B D; compoſitis igitur primis cum ſecundis, minor erit proportio rectanguli B Q E, ad rectangulum B F E,



quàm

quàm rectanguli B F E, ad rectangulum B D E. Sed vt rectangulum B Q E ad rectangulum B F E, ita eſt quadratum S Q ad quadratum α F: & vt rectangulum B F E ad rectangulum B D E, ita quadratum α F, ad quadratum A D; minor igitur proportio erit quadrati S Q, ad quadratum α F, quàm quadrati α F ad quadratum A D. Sed vt quadratum S Q ad quadratum α F, ita eſt quadratum S Z ad quadratum α ζ: & vt quadratum α F ad quadratum A D ita quadratum α ζ ad quadratum A C; minor igitur proportio erit quadrati S Z ad quadratum α ζ, quàm quadrati α ζ, ad quadratum A C, hoc eſt circuli S Z ad circulum α ζ, quàm circuli α ζ, ad circulum A C; qui circuli ſunt ſectiones conoidis A B C poſiti vt in propoſitionibus lemmaticis dicebamus. Rurſus quoniam ſunt quatuor primæ proportionales; vt rectangulum D B E ad rectangulum F B E, ita M D quadratum ad quadratum β F: & totidem ſecundæ, vt quadratum B D, ad quadratum B F, ita quadratum D K, ad quadratum F γ, ob ſimilium triangulorum latera proportionalia: ſed vt E B, ad B D, hoc eſt rectangulum D B E prima in primis ad quadratum B D primam in ſecundis, ita eſt quadratum M D tertia in primis ad quadratum D K tertiam in ſecundis; vt igitur compoſita ex primis ad compoſitam ex ſecundis, ità erit compoſita ex tertijs ad compoſitam ex quartis; videlicet vt rectangulum D B E vnà cum quadrato B D, hoc eſt rectangulum B D E ad rectangulum B F E, hoc eſt vt quadratum A D, ad quadratum α F, ità compoſitum ex quadratis M D, D K, ad compoſitum ex quadratis β F, F γ: & quadrupla vtrorumque, vt quadratum A C, ad quadratum α ζ ità compoſitum ex quadratis M N, K L, ad compoſitum ex quadratis β ι, γ δ; hoc eſt eorum circulorum, qui ſunt ſectiones ſolidorum, vt circulus A C, ad circulum α ζ, ità compoſitum ex circulis M N, K L, ad compoſitum ex circu-

L lis

lis $\beta\iota$, $\gamma\delta$. Eadem ratione erit vt circulus A C, ad circulum S Z, ità compoſitum ex circulis M N, K L, ad compoſitum ex circulis T Y, V X: & conuertendo, & ex æquali, vt circulus S Z, ad circulum $\alpha\zeta$, ità compoſitum ex circulis T Y, V X, ad compoſitum ex circulis $\beta\iota$, $\gamma\delta$: & vt circulus $\alpha\zeta$, ad circulum A C, ità cõpoſitum ex circulis $\beta\iota$, $\gamma\delta$, ad cõpoſitum ex circulis M N, K L. Sunt igitur tria compoſita ex binis ſectionibus circulis, & totidem alij circuli, quos diximus in eadẽ proportione, ſi bina ſumãtur in ſingulis planis ſecantibus: eorum autem minor erat proportio circuli S Z ad circulum $\alpha\zeta$, quàm circuli $\alpha\zeta$, ad circulum A C; minor igitur proportio erit cõpoſiti ex circulis T Y, V X, ad cõpoſitum ex circulis $\beta\iota$, $\gamma\delta$, quàm compoſiti ex circulis $\beta\iota$, $\gamma\delta$, ad compoſitum ex circulis M N, K L. Hac eadem ratione ad verticem deinceps progredienti manifeſtum erit, omnium compoſi-



122

poſitorum ex binis ſectionibus nempe circulis, quorum alter ad conum K B L pertinet, alter ad conoides M B N, in eodem plano ſecante prædictorum inter ſe parallelorum exiſtentibus, minorem eſſe proportionem incipienti ab eo, quod eſt proximum vertici, primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium, & ſecundi ad tertium, quàm tertij ad quartum, & ſic ſemper deinceps vſque ad maximum & vltimum compoſitum ex circulis M N, K L: & eandem dictas ſectiones compoſitas ex coni, & conoidis parabolici ſectionibus inter ſe habere proportionem, quàm habent inter ſe circuli ſectiones conoidis A B C, pro vt illis in iiſdem planis ſecantibus, & æqualia axis B D ſegmenta intercipientibus reſpondent: Igitur per trigeſimam ſecundam huius, & ſequens eam Corollarium, conoides A B C, & compoſitum ex conoide M B N, & cono B K L, commune habebunt in axe B D centrum grauitatis. Sed H erat huius compoſiti centrum grauitatis; Igitur conoidis A B C centrum grauitatis erit idem H. Quod demonſtrandum erat.

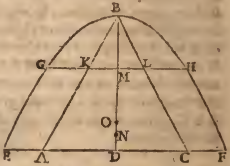
COROLLARIVM.

Eadem demonſtratione conſtat ſi prædicta tria ſolida ita vt diximus diſpoſita ſecentur plano baſibus parallelo; fruſtum conoidis hyperbolici, & compoſitum ex fruſtis coni, & conoidis parabolici, commune habere in communi axe centrum grauitatis.

PROPOSITIO XLIV.

Si conus & conoides parabolicum circa eundem axim ſecentur plano baſi parallelo; fruſti conici abſciſſi maiori baſi propinquius erit quàm parabolici centrum grauitatis.

Sint conus A B C, & conoides parabolicum E B F, quorum communis axis B D, cuius per quoduis punctum M, planum ſecans ea corpora plano baſium, quarum diametri A C, E F, parallelo abſcindat fruſta A K L C, cuius centrum grauitatis N, & E G H F, cuius centrum grauitatis O, quorum vtrumque erit in communi axe D M.



Dico punctum N, propinquius eſse ipſi D quàm punctum O. Quoniam enim eſt parabolici fruſti E G H F centrum grauitatis O; erit vt duplum maioris baſis, ideſt circuli E F vna cum minori circulo G H, ad duplum circuli G H vna cum circulo E F, hoc eſt vt duplum quadrati E D vna cum quadrato E D ita M O ad O D. Sed vt quadratum E D ad quadratum G M in parabola quæ conoides deſcribit, cuius diameter B D, ita eſt D B ad B M, hoc eſt A C ad K L; vt igitur eſt dupla ipſius A C vna cum K L ad duplam ipſius K L vna cum A C ita erit M O ad O D: ſed N eſt fruſti conoici A K L C, centrum grauitatis; punctum igitur N, erit maiori baſi A C propinquius quàm pun-

punctum O; eſt autem O, fruſti E G H F centrum grauitatis. Si igitur conus,& conoides parabolicum circa eundem axim,&c. Quod demonſtrandum erat.

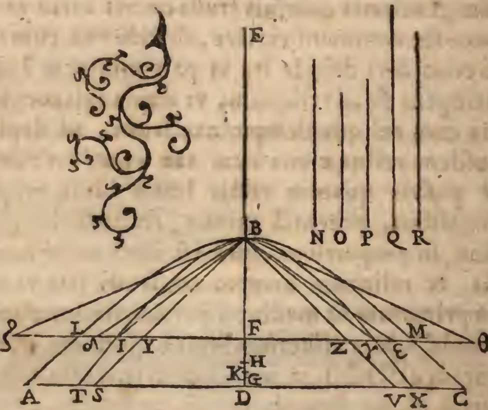
PROPOSITIO XLV.

Omnis fruſti conoidis hyperbolici centrum grauitatis eſt in axe primum ſecto ſecundum centrum grauitatis cuiuſuis fruſti conici circa axem conoidis communi vertice, abſciſſi vnà cum fruſto conoidis: deinde ita vt pars minorem baſim attingens ſit ad reliquam, vt dupla axis conoidis vna cum reliqua dempto axe fruſti, ad duplam eiuſdem reliquæ vna cum axe conoidis: deinde poſitis quatuor rectis lineis binis, proportionalibus, potentia primis, ſecundis longitudine, in proportione, quæ eſt inter axem conoidis, & reliquam dempto axe fruſti; ita vt maior primarum ſit media proportionalis inter axem conoidis,& tranſuerſum latus hyperboles,quæ figuram deſcribit, minoris autem potentia ſeſquialtera minor ſecundarum; in eo puncto, in quo ſegmentum axis fruſti dictis duabus ſectionibus terminatum ſic diuiditur,vt pars minori baſi propinquior ſit ad reliquam vt cubus, qui fit ab axe fruſtì vnà cum ſolido rectangulo, quod axe conoidis, & reliqua dempto axe fruſti, & tripla axis conoidis continetur, ad ſolidum rectangulum ex eadem reliqua parte conoidis, & eo, quo

 plus

plus poteſt quadrato maior quàm minor dicta-rum ſecundarum.

Sit conoidis hyperbolici A B C, cuius axis B D; & tranſuerſum latus hyperboles, quæ figuram deſcribit E B, fruſtum A L M C abſciſſum vnà cum axe F D: cuius

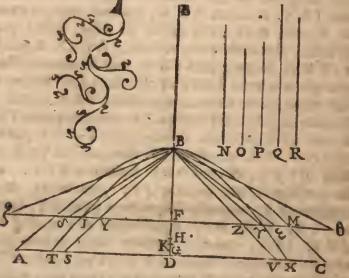


baſes oppoſitæ, maior circulus circa A C, minor circa L M: ſecto autem axe F D primum ſecundum G centrum grauitatis fruſti abſciſſi vnà cum fruſto A L M C à quouis cono, cuius axis B D, & vertex B, deinde in puncto H ita vt F H ad H D ſit vt dupla ipſius B D vnà cum B F ad duplam ipſius B F vnà cum B D, quo facto cadet G punctum infra punctum H, ponantur vt D B ad B F,

ita N ad O potentia, & Q ad P longitudine: ſit autem N media proportionalis inter EB, BD, at P ipſius O potentia ſeſquialtera: quo autem Q plus poteſt quàm P ſit quadratum ex R: & vt cubus ex FD vna cum ſolido rectangulo ex BF, FD, & tripla ipſius BD, ad ſolidum rectangulum ex BF, & quadrato R, ita ſit HK ad KG. Dico fruſti ALMC centrum grauitatis eſſe K. Producta enim quà opus eſt diametro AC ipſi BD æquales abſcindantur DS, DV: necnon ipſi N æquales DT, DX, vt ſit TD ad DS potentia, vt EB, ad BD longitudine, & deſcribantur conoides parabolicum TBX, & conus SBV, quorum vertex communis B, axis BD: ſectis autem his tribus ſolidis plano per axim, ſint ſectiones hyperbole ABC, & parabola TBX, & triangulum SBV, quæ figuras deſcribunt; quas planum baſis fruſti propoſiti circa LM ſecans vnà cum tribus ſolidis faciat cum parabola TBX rectam Iγ, & cum triangulo SBV rectam YZ: conoidis autem TBX, & coni SBV ſectiones circulos circa Iγ, YZ baſibus, circa SV, TX parallelos; vt ſint conoidis TBX fruſtum TIγX, & coni SBV fruſtum SYZV. Rurſus producta LM, ponatur ζF, æqualis Q, & abſcindatur Fδ, potentia ſeſquialtera ipſius IF, iunctiſque IB, Bδ, Bζ, deſcribantur tres coni ζBθ, δBι, IBγ, quorum omnium baſes nempe circuli erunt in dicto plano ſecante tria ſolida per punctum F. Quoniam igitur circuli inter ſe ſunt vt quæ fiunt à diametris, vel à ſemidiametris quadrata, coni autem eiuſdem altitudinis inter ſe vt baſes; erit vt δF ad FI potentia, ita conus δBι ad conum IBγ; ſeſquialter igitur conus δBι coni IBγ: ſed & conoides parabolicum IBγ ſeſquialterum eſt coni IBγ; æqualis igitur eſt conus δBι conoidi IBγ. Et quoniam in parabola TBX ordinatim ad diametrum applicatarum DT eſt ad FI hoc eſt N

ad

ad O potentia, vt D B ad B F longitudine: ſed T D eſt æqualis N; ergo & I F æqualis erit O: cum igitur & P ipſius O, & δ F ipſius F I ſit potentia ſeſquialtera, erit F δ æqualis ipſi P: ſed F ζ eſt æqualis ipſi Q; vt igitur eſt Q ad P, hoc eſt D B ad B F, ita erit ζ F ad F δ; duplicata igitur proportio erit quadrati ex F ζ ad quadratum ex E δ eius, quæ eſt D B ad B F: ſed vt quadratum ex F ζ ad



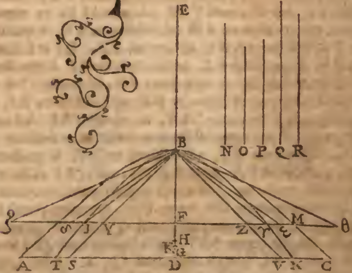
quadratum ex F δ, ita eſt circulus circa ζ θ ad circulum circa δ ε, hoc eſt conus ζ B θ ad conum δ B ε; coni igitur ζ B θ ad conum δ B ε, duplicata eſt proportio eius, quæ eſt D B ad B F: ſed & conoidis T B X ad conoides I B γ duplicata eſt proportio eius, quæ eſt D B ad B F, vt monſtrant alij; eadem igitur proportio eſt coni ζ B θ ad conum δ B ε quæ conoidis T B X ad conoides I B γ: ſed

conus

conus δBε æqualis eſt conoidi IBγ, vtpote inſcripti coni IBγ ſeſquialtero, cuius itidem ſeſquialter erat conus δBε; reliquum igitur coni ζBθ dempto cono δBε æquale erit conoidis TBX fruſto TIγX. Rurſus quia eſt vt cubus ex BD ad cubum ex BI ita conus SBV ad ſui ſimilem conum YBZ, in triplicata ſcilicet proportione laterum,ſiue axium DB, BF: ſed quia YF eſt æqualis BF, propter ſimilitudinem triangulorum,eſt vt cubus ex BF ad ſolidum ex BF & quadrato ex Fδ, ita quadratum ex FY ad quadratum ex Fδ, hoc eſt circulus circa YZ ad circulũ circa δε, hoc eſt conus YBZ ad conum δBε ex æquali igitur erit vt cubus ex BD ad ſolidum ex BF, & quadrato Fδ, ita conus SBV ad conum δBε: ſed vt ſolidum ex BF, & quadrato Fδ, ad ſolidum ex BF & quadrato Fζ, ita eſt ſimiliter vt ante conus δBε ad conum ζBθ; ex æquali igitur erit vt cubus ex BD ad ſolidum ex BF, & quadrato Fζ, ita conus SBV, ad conum ζBθ: ſed conuertendo, & per conuerſionem rationis, eſt vt ſolidum ex BF, & quadrato Fζ, ad ſolidum ex BF, & quadrato, quo plus poteſt Fζ quàm Fδ, ita conus ζBθ ad ſui reliquum dempto cono δBε; ex æquali igitur, vt cubus ex BD ad ſolidum ex BF & quadrato, quo plus poteſt Fζ quàm Fδ, hoc eſt,quo plus poteſt Q quàm P quadrato ex R, ita erit conus SBV, ad reliquum coni ζBθ dempto cono δBε, hoc eſt ad fruſtum TIγX. Rurſus,quoniam duo cubi ex BF, FD, & ſolidum ex BF, FD, & tripla ipſius BD, ſunt æqualia cubo ex BD; erit id quo plus poteſt cubice recta BD quàm BF, cubus ex FD, & ſolidum ex BF, FD, & tripla ipſius BD: cum igitur ſit vt cubus ex BD ad cubum ex BF, ita conus SBV ad conum YBZ; erit per conuerſionem rationis, & conuertendo, vt cubus ex FD vna cum ſolido ex BF, FD, & tripla ipſius BD ad cubum ex BD, ita fruſtum SYZV, ad conum SBV: ſed cubus ex BD, ad ſoli-

dum

dum ex B F & quadrato R, ita erat conus S B V ad fruſtum T I γ X: ex æquali igitur, erit vt cubus ex F D vna cum ſolido ex B F, F D, & tripla ipſius B D, ad ſolidum ex B F, & quadrato R, hoc eſt vt H K ad K G, ita ex contraria parte fruſtum S Y Z V, ad fruſtum T I γ X: nam fruſti S Y Z V eſt centrum grauitatis G: fruſti autem T I



γ X centrum grauitatis H; totius igitur compoſiti ex his duobus fruſtis centrum grauitatis erit K: commune autem eſt centrum grauitatis compoſiti ex duobus fruſtis S Y Z V & T I γ X, fruſto A L M C per antepenultimæ huius corollarium; fruſti igitur A L M C, centrum grauitatis erit K. Quod demonſtrandum erat.

CO-

19

COROLLARIVM.

Ex omnibus demonſtrationibus eorum, quæ in hoc ſecundo libro propoſuimus, manifeſtum eſt omnium ſupra dictorum corporum centra grauitatis inuenire: quæcumque enim in modum theorematis propoſuimus, eadem tanquam problemata proponi, & ijſdem demonſtrationibus abſolui poſſunt.

Idem dico de ijs, quæ in primo, & tertio ſequenti libro demonſtrauimus. Porro autem multa lemmata inſtituto præcipuo neceſſaria, & alia addita inuentio ſatis iucunda centri grauitatis conoidis, & portionis conoidis parabolici, & hyperbolici, & fruſti vtriuſque ne ſecundus hic liber nimis longus, & confuſus exiſteret, tertium requirebant. Quem quidem meorum ſtudiorum autumnalium fructum Anni à partu Virginis MDCIII. cum SS. Clementis Pont. Max. auctoritate, & Petri eius Nepotis Cardinalis ampliſſimi Aldobrandini iuſſu bene de me merentium Mathematicam ſcientiam, & Philoſophiam ciuilem in almo Vrbis Gymnaſio profiterer, in eorum gratiam compoſui, qui me centra grauitatis portionum ſphæroidis imperfecti operis crimine condemnandum omittere nolebant; cuius prouinciæ iuuante Deo, & mira Mathematicæ ſtudioſis ſatisfaciendi voluntate, multas difficultates ita ſuperaui, vt vno menſe, Octobri plus præſtiterim, quam à me requiſiſſent. ſiquidem quæ de ſphæræ portionibus in hoc libro proprijs eius figuræ rationibus, eadem in ſequenti aliis communibus cuilibet portioni ſphæræ, & ſphæroidis tum lati, tum oblongi abſciſſæ vno, vel duobus planis æque inter ſe diſtantibus, & vtcumque in figuram incidentibus

tibus

tibus demonſtraui, & temporis breuitatem magna animi intentione compenſaui, quòd facere non potuiſsem niſi illi, quos ſupra nominaui meos patronos tranquillum otium mihi ſua benignitate peperiſſent; ego autem quoſdam aduerſos flatus vehementes in meam vtilitatem vertere didiciſsem, cuius rei monumentum flammæ vento agitatæ ſimulacrum cum illo Vergilij HOC ACRIOR in fronte operis poſui, vt meus qualiſcumque hic labor vel ab inuitis in me collati beneficij memoriam præſeferret.

SECVNDI LIBRI FINIS.

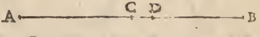
LVCAE VALERII DE CENTRO GRAVITATIS SOLIDORVM

LIBER TERTIVS.

PROPOSITIO I.

SI recta linea ſecta fuerit bifariam, & non bifariam; rectangulum partibus inæqualibus contentum æquale eſt rectangulo, quod bis fit ex dimidiæ ſectæ ſegmentis, vna cum quadrato non intermedij eorundem ſegmentorum.

Sit recta linea AB ſecta in puncto C bifariam, & non bifariam in puncto D. Dico rectangulum ADB æquale eſſe rectangulo BDC bis vnà cum quadrato BD. Quoniam enim rectangulum ADB, æquale eſt duobus rectangulis, & ex BD, DC, & ex AC, BD, hoc eſt ex



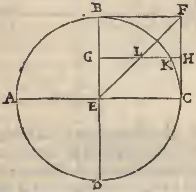
CB, BD: ſed rectangulum ex CB, BD, eſt rectangulum ex BD, DC, vnà cum quadrato BD; rectangulum igitur ex AD, DB, æquale eſt duobus rectangulis ex BD, DC, vnà cum quadrato BD. Si igitur recta linea ſecta fuerit bifariam, & non bifariam, &c. Quod demonſtrandum erat.

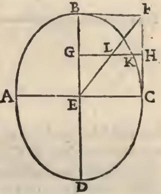
PROPOSITIO II.

Si circulum, vel ellipſim duæ rectæ lineæ tangentes in terminis coniugatarum diametrorum, conueniant: & punctum in quo conueniunt, & centrum figuræ iungantur recta linea; quæcunque hanc vnà cum prædictæ figuræ termino alterutri diametrorum parallela ſecuerit recta linea, ita ipſa ſecabitur in duobus punctis, vt rectangulum bis contentum ſegmentis, quorum alterum inter diametrum, & terminum figuræ, alterum inter figuræ terminum & contingentem interijcitur, vnà cum huius quadrato, ſit æquale quadrato reliqui ſegmenti inter diametrum, &

eam quæ tangentium concurſum, & centrum ſiguræ iungit interiecta.

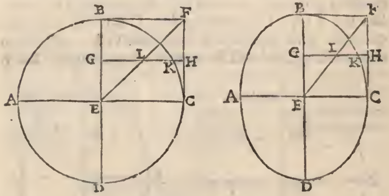
Sit circulus, vel ellipſis A B C D, cuius diametri coniugatæ A C, B E D, & figuram tangentes B F, G F, conueniant in puncto F; (parallelæ enim erunt vtraque alteri coniugatorum diametrorum:) & recta F E iungatur, & ex quolibet puncto G, in recta B E ducatur ipſi A C parallela G L K H. Dico rectangulum G K H bis vnà cum quadrato K H æquale eſſe quadrato G L. Quoniam enim rectangulum B G D æquale eſt rectangulo B G E





bis vnà cum quadrato B G: & rectangulum B E D, eſt quadratum B E, erit vt rectangulum B E D, ad rectangulum B G D, ita quadratum B E, ad rectangulum B G E bis, vnà cum quadrato B G: ſed vt rectangulum B E D, ad rectangulum B G D, ita eſt quadratum E C, hoc eſt quadratum G H ad quadratum G K, ex primo conicorum, vt igitur eſt quadratum B E ad rectangulum B G E bis, vnà cum quadrato B G, ita erit quadratum G H ad quadratum G K. Rurſus quia eſt vt B E ad E G, ita B F ad G L, propter ſimilitudinem triangulorum; erit vt quadratum B E ad quadratum E G, ita quadratum

B F hoc eſt quadratum G H ad quadratum G L: & per conuerſionem rationis, vt quadrátum B E ad rectangulum B G E bis, vnà cum quadrato B G, ita quadratum G H ad rectangulum G L H bis, vnà cum quadrato L H: ſed vt quadratum B E ad rectangulum E G B bis, vnà cum quadrato B G, ita erat quadratum G H ad quadratum G K; vt igitur quadratum G H ad quadratum G K,



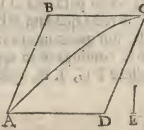
ita erit idem quadratum G H ad rectangulum G L H bis, vnà cum quadrato L H: quadratum igitur G K æquale erit rectangulo G L H bis, vnà cum quadrato L H; demptis igitur ab eodem quadrato G H æqualibus quadrato G K, & rectangulo G L H bis, vnà cum quadrato L H, erit rectangulum G K H, bis vnà cum quadrato K H æquale quadrato G L. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO III.

Per data duo puncta in duabus rectis lineis datum angulum continentibus, in earum plano parabola tranſibit, cuius vertex ſit aſſignatum prædictorum punctorum, in quo altera linea parabolam

lam contingat, altera in altero ſecet diametro æquidiſtans.

Sint data duo puncta A, C, in duabus rectis lineis datum angulum A B C continentibus, ſit autem aſſignatum punctum C. Dico per puncta A, C, parabolam tranſire, ita vt ipſam linea A C contingat in C puncto, altera autem A B ſecet in puncto A, diametro parabolæ æquidiſtans. Completo enim parallelogrammo B D, ad rectam C D applicetur rectangulum æquale quadrato A D, faciens latitudinem E. Quoniam igitur in plano B D parabola inueniri poteſt, cuius ſit vertex C, diameter C D, ita vt quædam ex ſectione ad diametrum C D applicata in dato angulo A B C, ideſt A D C, qualis eſt recta A D, poſſit rectangulum ex C D, & E, ex primo conicorum elemento; ſit ea ſectio parabola A C; aſſignatum eſt autem punctum C; per puncta igitur A, C parabola A C tranſibit, cuius vertex eſt aſſignatum punctum C. Et quoniam quæ ex vertice recta C B eſt applicatæ D A parallela, ſectionem A C in puncto C continget: eſt autem A B diametro C D æquidiſtans, ac proinde parabolam ſecabit in puncto A. Manifeſtum eſt igitur propoſitum,

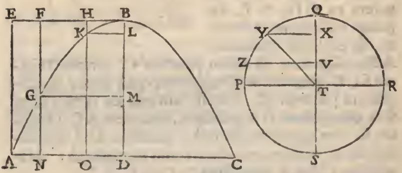


PROPOSITIO IV.

Si recta linea parabolam contingat, omnes rectæ lineæ ex ſectione ad contingentem applicatæ diame-

diametro ſectionis parallelæ inter ſe ſunt longitudine, vt inter applicatas & contactum, vel verticem interiectæ inter ſe potentia. Productis autem dictis applicatis, erunt inter ſectionem & baſim interiectæ inter ſe longitudine, vt in circulo, vel ellipſe ad diametrum ordinatim applicatæ, ſecantesque illam in eaſdem rationes, in quas aliæ prædictæ applicatæ ſecant baſim parabolæ, inter ſe potentia.

Sit ſectio parabola A B C, cuius vertex B, diameter B D: & recta quadam B E ſectionem contingente in puncto B, ſint quotcumque rectæ lineæ ex ſectione ordinatim ad B E contingentem applicatæ diametro B D ſectionis parallelæ F G, K H, quibus productis ſint ad baſim ſe-



ctionis applicatæ G N, K O. Et expoſito primum circulo, P Q R S, cuius diametri ad rectos inter ſe angulos ſint Q S, P R; ſecta autem Q T in punctis V, X, in eaſdem rationes, in quas ſecta eſt A D in punctis N, O, ſumpto ordine à punctis D, T, vt ſit D O ad O N,

vt eſt

vt eſt T V ad V X: & vt O N ad N A, ita V X ad X Q; applicentur ad ſemidiametrum Q T rectæ Z V, X Y diametro P R æquidiſtantes. Dico eſſe H K ad F G longitudine, vt F B ad B H potentia: & K O ad G N longitudine, vt Z Y ad Y X potentia. Iungantur enim K L, G M, baſi A C parallelæ. Quoniam igitur eſt vt M B ad B L longitudine, ita G M ad K L potentia: ſed M B eſt æqualis ipſi F G, & B L ipſi K H, & B F ipſi G M, & B H ipſi K L in parallelogrammis B G, B K; vt igitur F G ad K H longitudine, ita erit B H ad B F potentia: ſimiliter quotcumque plures eſſent applicatæ idem oſtenderemus. Rurſus, quoniam eſt vt E A, hoc eſt F N ad F G, ita quadratum E B ad B F quadratum, hoc eſt quadratum A D ad quadratum D N, hoc eſt ita quadratum Q T, hoc eſt quadratum T Y, hoc eſt duo quadrata T X, X Y, ad quadratum T X; erit per conuerſionem rationis, vt F N, hoc eſt B D ad G N, ita duo quadrata T X, X Y ſimul, hoc eſt quadratum T Y, hoc eſt quadratum T P, ad quadratum X Y. Similiter oſtenderemus eſſe vt B D ad O K, ita quadratum P T ad quadratum V Z. Conuertendo igitur erit vt O K ad B D, ita quadratum X Y ad P T quadratum: & ex æquali vt O K ad G N, ita quadratum V Z ad quadratum X Y. Sunt igitur tres rectæ lineæ B D, O K, G N, inter ſe longitudine, vt in circulo P Q S R totidem P T, Z V, X Y inter ſe potentiam, prout inter ſe reſpondent. Idem autem ſimiliter oſtenderemus de quotcumque aliis in circulo, & ſectione parabola vt prædictæ applicatis multitudine æqualibus. In ellipſe autem, ductis diametris quibuſuis coniugatis, & totidem quot in circulo ad vnam ſemidiametrum rectis lineis ordinatim applicatis ſecundum puncta ſectionum eiuſdem diametri in eaſdem prædictas rationes, eodemque ordine; quoniam ex XXI primi conicorum ſtatim apparet rectarum linearum ita vt diximus in circulo, & ellipſe applicatarum

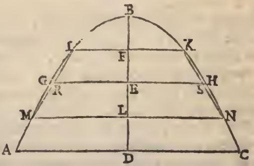
catarum

catarum quadrata eſſe inter ſe in eadem proportione;erunt prædictæ inter ſectionem parabolam,& baſim interiectæ inter ſe longitudine, vt in ellipſe ad diametrum ſimiliter vt diximus applicatæ inter ſe potentia. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO V.

Omnis figuræ circa axim in alteram partem deficientis, cuius ſuperficies, excepta baſe ſit tota interius concaua baſim habentis circulum, vel ellipſim; quælibet tres ſectiones baſi parallelæ æqualia axis ſegmenta intercipientes, ita ſe habent, vt minor ſit proportio minimæ ad mediam, quam mediæ ad maximam.

Sit figura A B C circa axem B D in alteram partem deficiens, qualem diximus: & poſitis in axe B D tribus quibuſlibet punctis F, E, L, æqualia axis ſegmenta intercipientibus, intelligatur ſolidũ A B C ſectum per ea puncta planis buibuſdã baſi circulo, vel ellipſi, circa A C parallelis: quare ſectiones erunt circuli, vel ellipſes ſimiles baſi,per definitionem,quarum diametri eiuſdem rationis in eodem plano per axim ſint I K. G H,



GH, MN. Dico ſolidi ABC ſectionum,minorem eſſe proportionem, ipſius IK ad GH, quàm GH ad MN. Iunctis enim MRS, KSN; quoniam tres rectæ IK, RS, MN, ſeſe æqualiter excedunt in trapezio KM; minor erit proportio IK ad RS, quàm RS ad MN: ſed circuli, & ſimiles ellipſes duplicatam habent inter ſe proportionem diametrorum eiuſdem rationis; trium igitur prædictarum ſolidi ABC ſectionum minor erit proportio IK ad RS quàm RS ad MN: ſed maior eſt proportio circuli, vel ellipſis GH ad circulum, vel ellipſim MN, quàm circuli, vel ellipſis RS, ad circulum, vel ellipſim MN; multo ergo minor proportio erit circuli, vel ellipſis IK ad circulum,vel ellipſim RS,quàm circuli,vel ellipſis GH ad circulum, vel ellipſim MN: ſed minor eſt proportio circuli vel ellipſis IK ad circulum, vel ellipſim GH, quàm eiuſdem circuli, vel ellipſis IK ad circulum, vel ellipſim RS; multo ergo minor proportio erit circuli, vel ellipſis IK ad circulum, vel ellipſim GH quàm circuli, vel ellipſis GH ad circulum, vel ellipſim MN. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VI.

Si ſphæroides ſecetur plano vtcumque præter quàm ad axem, circa quem ſphæroides deſcribitur erecto nam tunc circulus fit. ſectio ellipſis erit: ſimilis autem ipſi alia quæcumque ſectio ſphæroidis eidem parallela: earumque omnes diametri quæ eiuſdem ſunt rationis erunt in eodem plano per axem.

Extant hæc demonſtrata ab Archimede in ſuo de ſphæroidibus,& conoidibus.

PROPOSITIO VII.

Si conoides parabolicum, vel hyperbolicum ſecetur plano vtcumque ad axim inclinato, ſectio ellipſis erit: ſimilis autem ipſi alia quæcumque ſectio conoidis eidem parallela: eruntque earum omnes diametri, quæ eiuſdem ſunt rationis in eodem plano per axem.

Manifeſta ſunt hæc ex ijs, quæ Federicus Commandinus demonſtrauit de ſectionibus horum ſolidorum, in ſuis commentariis in eundem Archimedis librum de ſphæroidibus, & conoidibus: quemadmodum & ſphæroidis, & conoidis vtriuſque ſectionem factam à plano ad axim erecto eſſe circulum.

PROPOSITIO VIII.

Super datam ellipſim, circa datam rectam lineam ab eius centro eleuatam tanquam axem, coni, & cylindri portionem inuenire. Datoque ſphæroidi, & conoidi, vel conoidis, ſphæroidiſve portioni circa datum axem ſphæroidis, vel cuiuslibet dictarum portionum, cylindrus vel cylindri portio circumſcripta eſſe poteſt: vel comprehendere inter eadem plana parallela, ita vt eius baſis ſit ſimilis baſi, vel baſibus comprehenſæ portionis, vel fruſti, ſi de conoidibus ſit ſermo: & diametri, quæ eiuſdem ſunt rationis ſectæ à centro bifariam ſint in eadem recta linea.

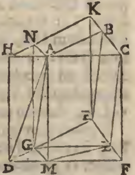
Mani-

Manifeſta item ſunt hæc omnia, ex ijs, quæ in eodem libro de ſphæroidibus, & conoidibus demonſtrat Archimedes.

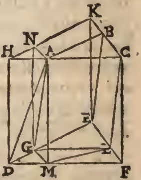
PROPOSITIO IX.

Omnis fruſti pyramidis triangulam baſim habentis ad priſtina, cuius baſis eſt maior baſis fruſti, & eadem altitudo, eam habet proportionem, quàm rectangulum contentum duobus lateribus homologis baſium oppoſitarum, vnà cum tertia parte quadrati differentiæ dictorum laterum, ad maioris lateris quadratum. Ad pyramidem autem, cuius baſis eſt maior baſis fruſti, & eadem altitudo, vt prædictum rectangulum, vna cum prædicti quadrati tertia parte, ad tertiam partem quadrati maioris lateris.

Sit pyramidis triangulam baſim habentis fruſtum A B C D E F: laterum autem homologorum A B, D E, triangulorum ſimilium oppoſitorum A B C, D E F, ſit differentia D G: & eiuſdem altitudinis fruſto ſit priſma D E F C H K: & pyramis intelligatur A D E F. Dico fruſtum B D F ad priſma H K F, eſſe vt rectangulum D E G vna cum tertia parte quadrati D G. Ad quadratum D E: ad pyramidem autem A D E F, vt prædictũ rectangulum D E G, vnà cum tertia parte quadrati D G, ad tertiam



tiam partem quadrati D E. Abſciſsis enim æqualibus E L ipſi B C, & F M ipſi A C, & E G, ipſi A B, conſtituantur priſmata A B C L E G, A G M F C L, A N H D G M, & pyramis A D G M, & iungatur M L. Quoniam igitur ob parallelas E F, G M, & D F, G L, ſimilia inter ſe ſunt triangula D E F, D G M, E G L, duplicatam inter ſe habebunt laterum homologorum D E, D G, G E, proportionem, hoc eſt eandem, quæ totidem eſt quadratorum ex ipſis D E, D G, G E, prout inter ſe reſpondent: vt igitur D G quadratum ad quadratum D E, ita eſt triangulum D G M ad triangulum D E F: eademque ratione vt quadratum G E ad D E quadratum, ita triangulum E G L ad triangulum D E F: & vt prima cum quinta ad ſecundam, ita tertia cum ſexta ad quartam: videlicet, vt duo quadrata D G, G E, ad quadratum D E, ita duo triangula D G M, E G L, ad triangulum D E F. & conuertendo, & per conuerſionem rationis, vt quadratum D E ad rectangulum D G E bis, ita triangulum D E F, ad parallelogrammum G F: & conuertendo, vt rectangulum D G E bis, ad quadratum D E, ita G F parallelogrammum ad triangulum D E F: & antecedentium dimidia, vt rectangulum D G E ad quadratum D E, ita triangulum G M L ad triangulum D E F; hoc eſt priſma, cuius baſis triangulum G L M, altitudo eadem priſmati H K F ad priſma H K F.



Rurſus, quoniam eſt vt quadratum E G ad quadratum E D, ita triangulum E G L ad triangulum D E F; erit ſimiliter vt quadratum E G ad quadratum E D, ita priſma B G L ad priſma H K F: ſed vt rectangulum D G E ad quadratum D E, ita priſma erat, cuius baſis triangulum G

L M al-

L M altitudo autem eadem priſmati H K F, hoc eſt priſma A C G L F M illi æquale per vltimam xi. elem. ad priſma H K F: vt igitur prima cum quinta, rectangulum D G E vna cum quadrato E G, hoc eſt rectangulum D E G, ad ſecundam quadratum D E, ita erit tertia cum ſexta, duo priſmata B G L, A C G L F M, ad quartam priſma H K F. Præterea quoniam vt quadratum D G ad quadratum D E, ita erat triangulum D G M ad triangulum D E F: ſed vt triangulum D G M ad triangulum D E F, ita eſt priſma, H G M, ad priſma H K F: & tertiæ antecedentium partes, videlicet, vt tertia pars quadrati D G, ad quadratum D E, ita pyramis A D G M ad priſma H K F: ſed vt rectangulum D E G ad D E quadratum, ita erant duo priſmata B G L, A C G L F M, ad priſma H K F; vt igitur prima cum quinta, rectangulum D E G vna cum tertia parte D G quadrati, ad quadratum G D ſecundam, ita erit tertia cum ſexta, duo priſmata B G L, A C G L F M vna cum pyramide A D G M, hoc eſt integrum fruſtum A B C D E F ad priſma H K F quartam. Ex hoc patet ſecunda pars propoſiti. Quoniam enim eſt vt rectangulum D E G, vna cum tertia parte quadrati D G, ad quadratum D E, ita fruſtum A B G D E F ad priſma H K F: vt autem quadratum D E, ad tertiam ſui partem, ita eſt priſma H K F ad pyramidem, cuius baſis triangulum D E F, altitudo eadem priſmati H K F; erit ex æquali vt rectangulum D E G vna cum tertia parte quadrati D G ad tertiam partem quadrati D E, ita fruſtum A B C D E F, ad pyramidem ſi compleatur A D E F. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

CO-

COROLLARIVM.

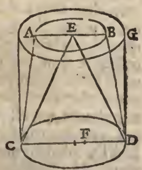
Hinc manifeſtum eſt eadem demonſtratione, qua vtimur ad propoſitionem XXXVI. primi libri; fruſtum cuiuslibet pyramidis baſim habentis pluribus quàm tribus lateribus contentam, ad priſma, ſeu pyramidem, cuius baſis eſt eadem quæ maior baſis fruſti, & eadem altitudo: & reliquum ipſius priſmatis dempto fruſto, ad ipſum priſma, eas habere rationes, quæ à baſium fruſti oppoſitarum homologis lateribus eorumque differentia deriuantur eo modo, quo in præcedenti theoremate dicebamus.

PROPOSITIO X.

Omne fruſtum coni, vel portionis conicæ, ad cylindrum, vel cylindri portionem, cuius baſis eſt eadem, quæ maior baſis fruſti, & eadem altitudo, eam habet proportionem, quàm rectangulum contentum baſium diametris eiuſdem rationis, vnà cum tertia parte quadrati differentiæ earumdem diametrorum, ad maioris baſis quadratum. Ad conum autem, vel coni portionem, cuius baſis eſt eadem, quæ maior baſis fruſti, & eadem altitudo; vt prædictum rectangulum, vnà cum prædicti quadrati tertia parte, ad tertiam partem quadrati ex diametro maioris baſis. Prædicti autem cylindri, vel

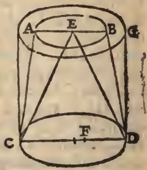
vel portionis cylindricæ reſiduum dempto fruſto, ad totum cylindrum, vel cylindri portionem; vt rectangulum contentum diametro minoris baſis fruſti, & differentia diametri maioris, vnà cum duabus tertiis quadrati differentiæ, ad quadratum diametri maioris baſis.

Sit coni, vel eius portionis fruſtum A B C D, cuius baſes oppoſitæ, circuli vel ſimiles ellipſes, quarum diametri minoris baſis A B cuius centrum E: maioris autem C D, & ſuper baſim circulum, vel ellipſim C D ſtet cylindrus, vel portio cylindrica C G comprehendens fruſtum A B C D, eiuſdemque altitudinis cum ipſo, & conus, vel coni portio E C D. quo autem A C diameter ſuperat diametrum A B, quæ differentia dicitur, ſit D F. Dico fruſtum A D ad cylindrum, vel portionem cylindricam C G, eſſe vt rectangulum D C F vnà cum tertia parte quadrati D F, ad quadratum C D. Ad conum autem vel coni portionem E C D, vt rectangulum DCF, vna cum tertia parte quadrati D F, ad tertiam partem quadrati C D. Cylindri autem, vel cylindri portionis C G reſiduum dempto fruſto A D, ad cylindrum, vel portionem cylindricam C G, vt rectangulum C F D vna cum duabus tertiis quadrati F D, ad quadratum C D. Cono enim, vel portioni conicæ, cuius fruſtum A D, & cylindro, vel portioni cylindricæ, cuius baſis eſt circulus, vel ellipſis C D, altitudo autem eadem completo cono, vel portioni conicæ iam dictæ, illi pyramis, huic priſma inſcripta intelligantur, quorum



com-

communis baſis ſit polygonum inſcriptum circulo quidem æquilaterum, & æquiangulum; in ellipſe autem, quod pro Archimede deſcribit Commandinus, ita vt & à cylindro, vel cylindri portione priſma, & à cono, vel coni portione pyramis deficiat minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita: quo modo autem in portione cylindrica, vel conica hoc fieri poſſit, eadem quæ de cono atque cylindro Euclides in duodecimo docuit manifeſtant. Abſciſſione igitur facta fruſti A D, & cylindri, vel portionis cylindricæ C G, abſciſſa ſimul erunt fruſtum pyramidis inſcriptum fruſto A D, & priſma inſcriptum cylindro, vel portioni cylindricæ C G, eiuſdem altitudinis inter ſe, & duobus prædictis ſolidis A D, C G, deficientia vnum à fruſto, alterum à cylindro, vel portione cylindrica multo minori ſpacio magnitudine propoſita: ſectiones autem priſmatis, & pyramidis erunt polygona circulis, vel ellipſibus ipſi C D oppoſitis & ſimilibus inſcripta inter ſe ſimilia, vt multi oſtendunt. erunt etiam ſimilium polygonorum circulis, vel ellipſibus ſimilibus, quæ ſunt baſes oppoſitæ fruſti A D, inſcriptorum diametri eædem A B, C D. Quoniam igitur ſimilium polygonorum circulis, & ſimilibus ellipſibus inſcriptorum latera homologa inter ſe ſunt vt diametri dictorum circulorum, vel ellipſium, eadem erit proportio inter duas diametros A B, C D, hoc eſt F C, C D, quæ inter duo quælibet latera homologa polygonorum circulis, vel ellipſibus ſimilibus A B, C D inſcriptorum. Sed pyramidis fruſtum fruſto C B inſcriptum ad priſma, cuius baſis eſt maior baſis fruſti pyramidis, & eadem altitudo, ſolido C G inſcriptum, eſt vt re-



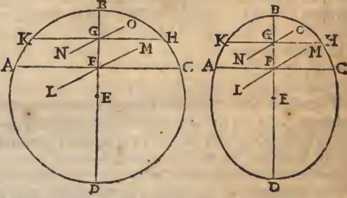
ctan-

ctangulum contentum lateribus homologis baſium oppoſitarum, vna cum tertia parte quadrati differentiæ, ad maioris lateris quadratum; idem igitur fruſtum pyramidis ad idem priſma, erit vt rectangulum D C F, vna cum tertia parte quadrati D F ad quadratum C D: deficit autem vtrumque & pyramidis fruſtum fruſto C B inſcriptum ab ipſo C B fruſto, & priſma ipſi C G inſcriptum ab ipſo C G, minori ſpacio quantacumque propoſita magnitudine; per tertiam igitur huius, erit vt rectangulum D C F vna cum tertia parte quadrati D F, ad C D quadratum, ita fruſtum C B ad cylindrum, vel portionem cylindricam C G. Cum igitur conus, vel coni portio E C D ſit pars tertia cylindri, vel portionis cylindricæ C G, erit ex æquali, vt idem rectangulum D C F, vna cum tertia parte quadrati D F, ad tertiam partem quadrati C D, ita fruſtum B C, ad conum vel coni portionem E C D. Præterea, quia quadratum C D æquale eſt duobus quadratis ex C F, F D, vna cum rectangulo bis ex C F, F D: quorum rectangulo C F D, vna cum quadrato C F æquale eſt rectangulum D C F; erit quadratum C D æquale rectangulo D C F vna cum quadrato D F; demptis igitur rectangulo D C F, & tertia parte quadrati D F; quod remanet C D quadrati erit rectangulum C F D vna cum duabus tertiis quadrati D F. quoniam igitur eſt conuertendo vt quadratum C D ad rectangulum D C F, vna cum tertia parte quadrati D F, ita cylindris, vel portio cylindrica C G ad fruſtum C B, erit per conuerſionem rationis, & conuertendo, vt rectangulum C F D vna cum duabus tertiis D F quadrati, ad quadratum C D, ita reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ C G dempto fruſto C B, ad cylindrum, vel portionem cylindricam. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XI.

Si ſphæra, vel ſphæroides ſecetur duobus planis parallelis vtcumque, neutro per cẽtrum ducto: quædam autem ex centro recta linea tranſeat per centrum alterutrius ſectionum; per centrum reliquæ tranſibit.

Sit ſphæra, vel ſphæroides ſectum duobus planis parallelis vtcumque neutro per centrum ducto, quod ſit E: per ſectionum autem, quæ ſunt circuli, vel ſimiles ellipſes, alterutrius centrum F tranſiens recta E F B occurrat reliquæ ſectionis plano in puncto G. Dico reliquæ ſectionis centrum eſſe G. Planum enim per O B ſe-



cans ſphæram, vel ſphæroides, faciensque ſectionem circulum, vel ellipſim A B C D, ſecabit, & ſecet prædictas ſectiones, circulos inquam, vel ſimiles ellipſes parallelas, quarum alterius centrum ponitur F. Faciatque ſectiones rectas parallelas A F C, K G H: ſimiliter aliud quodlibet pla-

planum per B E ſecans ſphæram, vel ſphæroides faciat ſe-ctionem circulum, vel ellipſim, & in ea parallelas L F M, N G O, communes ſectiones iam factæ ſectionis ſphæræ vel ſphæroidis cum circulis, vel ellipſibus inter ſe parallelis quarum diametri ſunt A C, K H. Quoniam igitur E eſt centrum ſphæræ, vel ſphæroidis; omnes in eo per punctum E, tranſeuntes rectæ lineæ bifariam ſecabuntur: ſed idem E eſt in ſectione ſphæræ, vel ſphæroidis, circulo, vel ellipſe A B C D; omnes igitur in ipſa rectas lineas bifariam ſecabit punctum E, & centrum erit circuli, vel ellipſis A B C D: quædam igitur ex centro recta E B ſecans parallelarum neutrius per centrum ductæ alteram A C bifariam in circuli, vel ellipſis A L C M centro F, & reliquam in puncto G bifariam ſecabit. Similiter oſtenderemus rectam N O ſectam eſse bifariam in puncto G: atque adeo circuli, vel ellipſis K N H O centrum eſſe G. Recta igitur E, tranſiens per centrum ſectionis A L C M, tranſibit per centrum reliquæ K N H O ipſi A L C M parallelæ. Quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

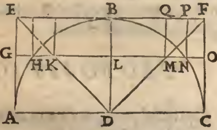
Hinc manifeſtum eſt, ſi ſphæra, vel ſphæroides ſecetur plano non per centrum: & recta linea ſphæræ, vel ſphæroidis, & factæ ſectionis centra iungens ad ſuperficiem vtrinque producatur; talis axis ſegmenta eſſe axes portionum, earumque vertices extrema dicti axis, vt in figura theorematis ſunt puncta B, D.

PROPOSITIO XII.

Si hemiſphærium, vel hemiſphæroides vtcumque abſciſſum: & cylindrus, vel cylindri portio illi circumſcripta: & conus, vel coni portio, cuius baſis eſt eadem ſolido circumſcripto, hemiſphærium, vel hemiſphæroides ad verticem contingẽs, & communis axis; ſecentur vno plano, baſi hemiſphærij, vel hemiſphæroidis parallelo: ſuper ſectiones autem prædicti coni, vel portionis conicæ, & hemiſphærij, vel hemiſphæroidis, circa huius abſciſsæ portionis axem duo cylindri, vel portiones cylindricæ conſtiterint; reliquum cylindri vel portionis cylindricæ prædicto plano abſciſsæ, dẽpto eo cylindro duorũ prædictorum, vel portione cylindrica, cuius baſis eſt ſectio hemiſphærij, vel hemiſphæroidis, æquale erit reliquo cylindro, vel portioni cylindricæ, cuius baſis eſt ſectio prædicti coni, vel portionis conicæ.

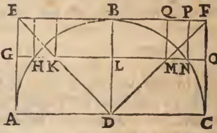
Eſto hemiſphærium, vel hemiſphæroides A B C, cuius axis B D, baſis circulus, vel ellipſis, cuius diameter A C. Et ſolido A B C circumſcriptus cylindrus, vel portio cylindrica, cuius baſes oppoſitæ erunt circuli, vel ſimiles ellipſes, quarum diametri eiuſdem rationis A D C, E F, latera oppoſita parallelogrammi per axem A F G C: & ſuper baſim, cuius diameter E F, circa axim B D, deſcriptus eſto conus, vel coni portio E D F. Iam tria ſolida A B C, E D F, A C, ſecentur plano ſolidi A B C baſi parallelo, quod ſecabit, & ſecet vnà figuras planas per axim B D

tribus ſolidis communem,poſitas in eodem plano,quæ ſunt A F parallelogrammum, triangulum E D F, & ſemicirculus, vel ſemi ellipſis A B C: & ſint ſectiones rectæ G O, H N, K M: hæ igitnr erunt diametri eiuſdem rationis trium ſectionum, ſcilicet circulorum, vel ellipſium ſimilium,quibus erit commune centrum L, in quo nimirum axis B D tres dictas lineas G O, H N, K M, bifariam ſecat. Vt igitur de ſolido A F diximus,ſint circa axem B L, & ſuper baſes circulos, vel ellipſes circa H N, K M cylindri, vel portiones cylindricæ H P, K Q, qui vnà cum portione cylindrica,vel cylindro G F ipſa ſectione facto, erunt inter eadem plana parallela per E F, G O. Dico trium cylindrorum, vel cylindri portionum G F, H P, K Q, reliquũ ipſius G F dempto H P, ipſi K Q eſſe æquale. Quoniam enim cylindri,& cylindri portiones eiuſdem altitudinis inter ſe ſunt vt baſes, circuli autem, & ſimiles ellipſes; inter ſe, vt quæ à diametris eiuſdem rationis fiunt quadrata; ex Archimede, hoc eſt vt earum quartæ partes, quæ à ſemidiametris quadrata deſcribuntur; erit vt quadratum L O ad quadratum L N, ita cylindrus, vel portio cylindrica G F ad cylindrum, vel portionem cylindricam P H: & diuidendo, vt rectangulum L N O bis vnà cum quadrato N O, ad quadratum L N, ita reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ G F, dempto ipſo P H, ad ipſum P H: ſed vt quadratum L N ad quadratum L M, ita eſt vt ſupra, cylindrus, vel portio cylindrica H P ad cylindrum, vel portionem cylindricam K Q, ex æquali igitur,



erit

erit vt rectangulum L N O bis, vnà cum quadrato N O, ad quadratum L M, ita reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ G F dẽpto H P, ad cylindrum, vel portionẽ cylindricam K Q: ſed rectangulum L N O bis vnà cũ quadrato N O æquale eſt quadrato L M; reliquum igitur cylindri, vel portionis cylindricæ G F, dẽpto H P, æquale erit cylindro, vel portioni cylindricæ K Q. Quod erat demonſtrandum.

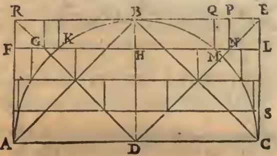


PROPOSITIO XIII.

Cylindri, vel portionis cylindricæ hemiſphærio, vel hemiſphæroidi circumſcriptæ reliquum dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide, æquale eſt cono, vel portioni conicæ eandem baſim hemiſphærio, vel hemiſphæroidi, & eandem altitudinem habenti.

Eſto hemiſphærio, vel hemiſphæroidi A B C, cuius axis B D, baſis circulus, vel ellipſis circa diametrum A D C, circumſcriptus cylindrus, vel cylindrica portio A E, circa communem ſcilicet axim B D. conus autem, vel coni portio circa axim B D, baſim habens communem ſolido A B C, intelligatur. Dico reliquum ſolidi A E, dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide A B C æquale

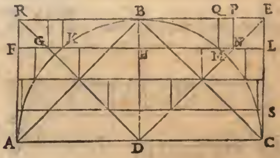
quale eſse cono, vel portioni conicæ. Nam circa axim B D, & ſuper baſim circulum, vel ellipſim, cuius diameter R E, ſimilem & oppoſitam ei, quæ circa A C, deſcribatur conus, vel coni portio R D E. Deinde axe B D bifariam ſecto, & ſingulis eius partibus rurſus bifariam, vt partes axis B D omnes ſint æquales, per puncta ſectionum, quotquot erunt, totidem plana parallela ſecent vnà cum ſolido A E duas ipſius partes, ſolida A B C, R D E. Omnes igitur factæ ſectiones, vel erunt circuli, vel ſimiles ellipſes ei, quæ eſt circa A C, atque adeo inter ſe ſimiles: talium autem ſectiones communes cum A E parallelo-



grammo per axim, erunt rectæ lineæ, ternæ in ſingulis planis ſecantibus, & in eadem recta linea; vt in proxima ipſi R E, ſunt F L, G N, K M, quæ quidem erunt trium circulorum, vel ſimilium ellipſium diametri eiuſdem rationis baſium trium ſolidorum, cylindri ſcilicet, vel portionis cylindricæ F L, fruſti G L, & portionis K B M, hemiſphærij, vel hemiſphæroidis A B C. Itaque circa axem B H cylindri, vel portionis cylindricæ F E, & ſuper baſes circulos, vel ellipſes circa G N, K M, deſcribantur cylindri, vel cylindri portiones G P, K Q, qui partes erunt totius cylindri, vel portionis cylindricæ F E. Idem fiat circa reliquas axis partes B D tamquam axes,

ſuper

ſuper reliquas ſectiones ternas in ſingulis prædictis planis ſecantibus. Hac ratione habebimus iam duas figuras compoſitas ex cylindris, vel cylindri portionibus altitudine, & multitudine æqualibus, alteram cono, vel portioni conicæ R D E inſcriptam, alteram hemiſphærio, vel hemiſphæroidi A B C circumſcriptam: quod ita factum eſſe intelligatur, quemadmodum in primo libro fieri poſse demonſtrauimus, vt figura cono R D E inſcripta ab eo deficiat, hemiſphærio autem, vel hemiſphæroidi A B C circumſcripta ipſum excedat minori ſpacio magnitudine propoſita quantacumque illa ſit. Reliquo itaque cylin-



dri, vel portionis cylindricæ A E dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide A B C figura quædam inſcripta relinquetur ex cylindris, vel portionis cylindricæ reſiduis æqualium altitudinum, demptis ijs, ex quibus conſtat figura hemiſphærio, vel hemiſphæroidi AB C circumſcripta, excepto infimo cylindro, vel portione cylindrica A S. Et quoniam (excepto exceſsu, quo ſolidum A S excedit ſui partem portionem quandam hemiſphærij, vel hemiſphæroidis A B C) quo ſpacio figura hemiſphærio, vel hemiſphæroidi A B C circumſcripta ſuperat ipſum hemiſphærium, vel hemiſphæroides, eodem figura prædicto reſiduo inſcripta deficit à reſiduo; deficiet ab eodem minori differentia quàm

ſit ma-

ſit magnitudo propoſita. His ita ex poſitis, quoniam ex præcedenti, reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ FE dempto cylindro, vel portione cylindrica K Q, æquale eſt cylindro, vel portioni cylindricæ G P: eademque ratione ſingula cylindrorum, vel cylindri portionum reſidua, quæ ſunt in reliqua figura cylindri, vel portionis cylindricæ A E, dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide A B C, æqualia erunt ſingulis cylindris, vel cylindri portionibus, quæ ſunt in cono, vel portione conica R D E, ſi bina ſumantur inter eadem plana parallela, vel circa eundem axem; tota igitur figura inſcripta prædicto reſiduo, toti figuræ inſcriptæ cono, vel portioni conicæ R D E æqualis erit: deficit autem vtraque figura inſcripta à ſibi circumſcripta minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita; per tertiam igitur huius, reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ A E, dempto hemiſphærin, vel hemiſphæroide A B C, æquale eſt cono, vel portioni conicæ R D E, hoc eſt ipſi A B C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XIV.

Si hemiſphærium, vel hemiſphæroides, & cylindrus, vel portio cylindrica ipſi circumſcripta, & conus, vel coni portio, cuius eſt idē axis portioni, baſis autem quę opponitur communi baſi duorum prædictorum ſolidorum, vnà ſecentur duobus planis baſi parallelis; portiones reliquæ figuræ ex cylindro, vel cylindri portione hemiſphærio, vel hemiſphæroidi circumſcripta dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide, quæ à duobus prædictis planis ſecantibus fiunt, æquales ſunt ſingulæ

gulæ ſingulis prædicti coni, vel conicæ portionis partibus ſiue fruſtis inter eadem plana parallela reſpondentibus.

Eſto hemiſphærium, vel hemiſphæroides A B C, cuius axis B D, baſis circulus, vel ellipſis, cuius diameter A D C. ſolido autem A B C circumſcriptus cylindrus, vel portio cylindrica A X E C: & conus, vel coni portio ſit X D E, cuius vertex D, baſis circulus, vel ellipſis circa X B E baſi ſolidi A E, vel A B C, prædictæ oppoſita, ſecto autem ſolido A E, atque vnà cum ipſo eius partibus, ſolidis A B C, X D E, duobus planis baſi ſolidi A E, vel A B C, atque ideo inter ſe quoque parallelis, intelligantur trium ſolidorum portiones ternæ inter eadem plana parallela: videlicet inter duo per X E,



F N, hemiſphærij, vel hemiſphæroidis minor portio H B L: & reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ F E dempta portione H B L: & coni, vel conicæ portionis fruſtum X G M E. ſimiliter inter duo plana per F N, O V ſolidi A B C portio P H L T, eaque ablata reliquum ſolidi O N, & fruſtum G Q S M. Denique ſolidi A B C portio A P T C, eaque ablata, reliquum ſolidi A V, & conus, vel coni portio Q D S. Dico reliquum ſolidi F E, dempto H B L eſſe æquale fruſto X G M E: & reliquum ſolidi O N dempto P H L T, æquale fruſto G Q S M: & reliquum ſolidi A V dempto ſolido A P T C æquale ſolido Q D S.

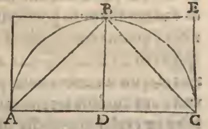
Quo-

Quoniam enim vt ſupra oſtendimus, reliquum ſolidi A E, dempto ſolido A B C æqu ale eſse ſolido X D E, ſimiliter oſtenſum remanet, tam reliquum ſolidi A N, dempto ſolido A H L C, æquale eſse ſolido G D M, quam reliquum ſolidi A V dempto ſolido A P T C æquale ſolido Q D S; erit demptis æqualibus, tam reliquum ſolidi F E, dempto ſolido H B L, æquale ſolido X G M E; quam reliquum ſolidi O N, dempto ſolido P H L T æquale ſolido G Q S M. At reliquum ſolidi A V dempto ſolido A P T C ſolido Q D S æquale erit. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XV.

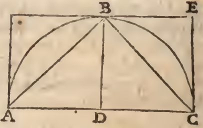
Hemiſphærium, vel hemiſphæroides ſubſeſquialterum eſt cylindri; vel portionis cylindricæ ipſi circumſcriptæ.

Eſto hemiſphærium, vel hemiſphæroides A B C, ipſique circumſcriptus cylindrus, vel portio cylindrica A E, circa eundem ſcilicet axem B D, & ſuper eandem baſim circulum, vel ellipſim, circa A C: nam hac ratione baſis oppoſita ſolidum A B C tanget ad verticem B. Dico hemiſphæriũ, vel hemiſphæroides A B C eſse cylindri, vel portionis cylindricæ A E ſub ſeſquialterum. Nam



circa axem B D, ſuper prædictam baſem circa A C, eſto deſcriptus conus, vel coni portio A B C. Quoniam igitur

cylindri, vel portionis cylindricæ A E reliquum dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide A B C æquale eſt cono, vel portioni conicæ A B C: & cylindrus, vel portio cylindrica A E tripla eſt coni, vel portionis conicæ A B C; triplus itidem erit cylindrus, vel cylindrica portio A E dicti reſidui dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide A B C; ac propterea hemiſphærij, vel hemiſphæroidis A B C



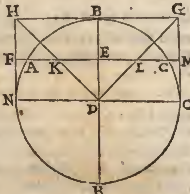
ſeſquialter, hoc eſt hemiſphærium, vel hemiſphæroides A B C cylindri, vel portionis cylindricæ A E ſubſeſquialterum. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVI.

Omnis minor portio ſphæræ, vel ſphæroidis ad cylindrum, vel cylindri portionem, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, vel æqualis, & ſimilis ellipſi per centrum baſi portionis parallelæ, & eadem altitudo portioni; eam habet proportionem, quam rectangulum contentum ſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis axi portionis congruentis ijs, quæ à centro baſis portionis fiunt ſegmẽtis, vnà cum duobus tertiis quadrati axis portionis; ad ſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis quadratum.

Sit minor portio A B C, ſphæræ, vel ſphæroidis, cuius centrum D, axis autem axi portionis congruens B E D R: & cy-

& cylindrus, vel portio cylindrica F G abſciſſa vnà cum portione A B C ex cylindro, vel portione cylindrica N O circumſcripta hemiſphærio, vel hemiſphæroidi N B O, cuius baſis circa diametrum N O, ſit baſi portionis A B C parallela: qua ratione baſis prædicti ſolidi F G, erit vel circulus, vel ellipſis æqualis circulo maximo, vel ſimilis, & æqualis ellipſi circa N O, portionis A B C baſi parallelæ. Dico portionem A B C ad cylindrum, vel portionem cylindricam F G, eſse vt rectangulum B E D, vnà cum duabus tertiis quadrati E B ad quadratum B D. Eſto enim conus, vel coni portio H D G, cuius fruſtum H K L G prædicto plano abſciſſum: & omnino ſint circulorũ, vel ellipſium ſimilium diametri eiuſdem rationis cũ N O, vt ad XII huius, in eadẽ recta linea tres F M, A C, K L, ſectæ omnes bifariam in cõmuni cẽtro E,



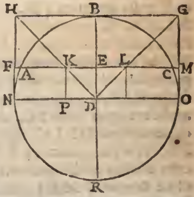
& H B G, in eodem plano per axem. Quoniam igitur ex ſuperioribus, reliquum ſolidi F G, dempto A B C, æquale eſt fruſto H K L G; erit eiuſdem ſolidi F G reliquum A B C æquale reliquo ſolidi F G, dempto H K L G: ſed hoc reliquum dempto H K L G, ſupra oſtendimus eſse ad ſolidum F G, vt rectangulum ex K L, & differentia H G, vnà cum duabus tertiis quadrati differentiæ, ad quadratum G H: & vt H G ad K L, ita eſt B D ad D E, propter ſimilitudinem triangulorum; vt igitur eſt rectangulum B E D, vnà cum duabus tertiis quadrati B E, ad quadratum B D, ita erit portio A B C, ad cylindrum, vel portionem cylindricam F G. Quod demonſtrandum erat.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

Omnis portio ſphæræ, vel ſphæroidis abſciſſa duobus planis parallelis, altero per centrum ducto, ad cylindrum, vel cylindri portionem, cuius baſis eſt eadem, quæ maior baſis portionis, & eadẽ altitudo; eam habet proportionem, quam rectangulum contentum ijs, quæ à centro minoris baſis fiunt axis ſphæræ, vel ſphæroidis ſegmentis, vnà cum duabus tertiis quadrati axis portionis; ad ſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis quadratum.

Sit portio N A C O ſphæræ, vel ſphærodij, cuius centrum D, axis autem axi portionis congruens B E D R, abſciſsa duobus planis parallelis altero per centrum D, ſectionem faciente circulum maximum, vel ellipſim, cuius diameter N O, & ſuper dictam ſectionem, circa axem E D, ſtet cylindrus, vel portio cylindrica N M, abſciſsa ijſdem planis, quibus portio N A C O, à cylindro, vel portione cylindrica N G, ſit circumſcripta hemiſphærio, vel hemiſphæroidi N B O: qua ratione erit cylindri, vel portionis cylindricæ N M baſis eadem, quæ maior baſis portionis N A C O, circulus ſcilicet, vel ellipſis circa N O, & eadem altitudo portioni. Dico portionem



N A C O,

N A C O, ad cylindrum,vel portionem cylindricam N M, eſse vt rectangulum B E R, vnà cum duabus tertiis E D quadrati,ad quadratum B D. Ijſdem enim quæ in præcedenti conſtructis,& notatis, ſit præterea cylindrus, vel portio cylindrica P L, circa axim E D circumſcripta cono, vel portioni conicæ K D L. Quoniam igitur reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ N M, dempta portione N A C O æquale eſt cono, vel portioni conicæ K D L, erit reliqua portio N A C O æqualis reliquo eiuſdem N M, dempto cono,vel portione conica K D L. Et quoniam circuli, & ſimiles ellipſes inter ſe ſunt vt quadrata diametrorum,vel ſemidiametrorũ eiuſdem rationis: cylindri autem, & portiones cylindricæ eiuſdẽ altitudinis inter ſe vt baſes; erit vt quadratum E M, hoc eſt quadratum B G, ad quadratum E L, hoc eſt vt quadratum B D ad quadratum D E,propter ſimilitudinem triangulorum,ita ſolidum N M ad ſolidum P L: & per conuerſionem rationis, vt quadratum B D ad rectangulum B E D bis, vnà cum quadrato B E, ita ſolidum M N, ad ſui reliquum dempto ſolido P L: & conuertendo, vt rectangulum B E D bis, vnà cum quadrato B E, hoc eſt rectangulum B E R, ad quadratum B D, ita reliquum ſolidi N M dempto ſolido P L ad ſolidum N M. Rurſus, quoniam eſt vt quadratum E L ad quadratum E M, ſiue B G, hoc eſt vt quadratum E D ad quadratum B D, ita ſolidum P L ad ſolidum N M, ob ſimilem rationem ſupradictæ: & duæ tertiæ partes ſolidi P L eſt ſolidum K D L; erit ex æquali, vt duæ tertiæ quadrati E D ad quadratum B D, ita reliquum ſolidi P L dempto ſolido K D L, ad ſolidum N M: ſed vt rectangulum B E R ad quadratum B D, ita erat ſolidi N M reliquum dempto ſolido P L, ad ſolidum N M; vt igitur prima cum quinta ad ſecundam, ita erit tertia cum ſexta ad quartam; videlicet, vt rectangulum B E D, vnà cum duabus tertiis E D quadrati ad quadratum B D, ita reliquum

cylin-

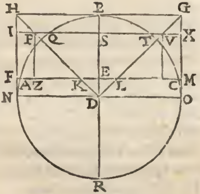
cylindri, vel portionis cylindricæ N M, dempto cono, vel portione conica K D L, hoc eſt portio N A C O ipſi æqualis, ad cylindrum, vel portionem cylindricam N M. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Omnis portio ſphæræ, vel ſphæroidis abſciſſa duobus planis parallelis, neutro per centrum ducto, nec centrum intercipientibus, ad cylindrum, vel cylindri portionem, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, vel ellipſi per centrum baſibus portionis parallelæ ſimilis, & æqualis, eam habet proportionem, quam duo rectangula; & quod ſphæræ, vel ſphæroidis axis axi portionis congruẽtis ijs, quæ à centro minoris baſis portionis fiunt ſegmẽtis, & quod ea, quæ maioris baſis portionis, & ſphæræ, vel ſphæroidis centra iungit, & axe portionis continetur, vnà cum duabus tertijs quadrati axis portionis; ad ſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis quadratum.

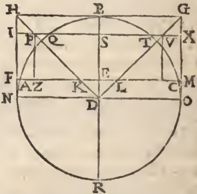
Sit portio A Q T C ſphæræ, vel ſphæroidis, cuius centrum D, axis autem axi portionis congruens B S E D R, abſciſſum duobus planis parallelis, neutro per centrum D acto, nec ipſum intercipientibus: & circa portionis axim S E ſtet cylindrus, vel portio cylindrica F X abſciſsa vnà cum portione A Q T C ex toto cylindro, vel portione cylindrica N G, hemiſphærio, vel hemiſphæroidi N B O circumſcripta, cuius baſis circulus maximus vel ellipſis

vel ellipſis circa N O baſibus A Q T C portionis parallela: qua ratione cylindris, vel portionis cylindricæ F X eiuſdem altitudinis portioni A Q T C, baſis erit circulus æqualis circulo maximo, vel ellipſis ſimilis, & æqualis ei, cuius diameter N D O, baſibus A Q T C portionis parallelæ. Dico portionem A Q T C ad cylindrum, vel portionem cylindricam F X, eſſe vt duo rectangula B S R. D E S, vnà cum duabus tertiis quadrati E S, ad quadratum B D. Ijſdem enim conſtructis, & notatis, quæ in antecedenti, excepto cylindro, vel portione cylindrica, circa ſolidum K D L: planum præterea minoris baſis Q T portionis A Q T C attendatur ſecans tria ſolida, & figuras planas per axim poſitas in eodem plano, faciéſq; ternas ſectiones, circulos, vel ellipſes ſimiles ei, quæ eſt circa N O: & earum diametros I X, P V, Q T, in eadem recta linea cõmuni ſectione iam dicti plani, &



eius, quod per axem: quæ quidẽ diametri ſectæ erunt omnes bifariam in centro S communi trium prædictarum planarum ſectionũ. Denique coni, vel portionis conicæ H D G fruſto P K L V abſciſſo vnà cum portione A Q T C, ſit circa axim S E circumſcriptus cylindrus, vel portio cylindrica Z V. Quoniam igitur per x I I I I huius, reliquum ſolidi F X, dempta portione A Q T C, æquale eſt fruſto P K L V; erit reliqua portio A Q T C, reliquo eiuſdem ſolidi F X, dempto fruſto P K L V æqualis. Et quoniam eſt vt P V ad K L, ita S D, D E, propter ſimilitudinem triangulorum: & vt rectangulum ex K L, & differentia

ipſius P V, vnà cum duabus tertiis quadrati eiuſdem differentiæ, ad quadratum P V, ita eſt reliquum ſolidi Z V dempto fruſto P K L V ad ſolidum Z V; erit vt rectangulum D E S, vnà cum duabus tertiis quadrati E S, ad D S quadratum, ita ſolidi Z V reliquum dempto fruſto P K L V ad ſolidum Z V: ſed vt quadratum D S ad quadratum D B, hoc eſt vt quadratum S V ad quadratum B G, ideſt ad quadratum S X, ita eſt ſolidum Z V, ad ſolidum F X; ex æquali igitur, vt rectangulum D E S, vnà cum duabus tertiis E S quadrati, ad quadratum B D, ita erit reliquum ſolidi Z V, dempto ſolido P K L V ad ſolidum F X: ſed vt rectangulum B S R ad quadratum B D, ita eſt, eadem ratione, qua in præcedenti theoremate vtebamur, reliquum ſolidi F X dempto ſolido Z V, ad ſolidum F X; vt igitur prima cum quinta ad ſecundam, ita erit tertia cum ſexta ad quartam; videlicet, vt duo

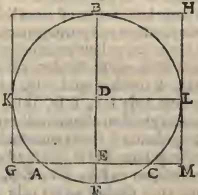


rectangula B S R, D E S, vnà cum duabus tertiis quadrati E S ad quadratum B D, ita erit totum reliquum cylindri, vel portionis cylindricæ F X dempto fruſto P K L V: hoc eſt ſphæræ, vel ſphæroidis portio A Q T C ad cylindrum, vel portionem cylindricam F X. Quod demonſtrandum erat.

PRO-

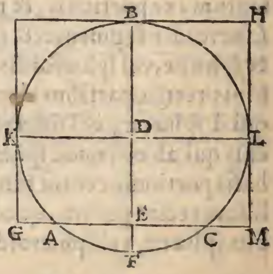
PROPOSITIO XIX.

Omnis maior portio ſphæræ, vel ſphæroidis, ad cylindrum, vel portionem cylindricam, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, vel æqualis, & ſimilis ellipſi per centrum baſi portionis parallelæ, altitudo autem eadem portioni, eam habet proportionem, quam ſolidum rectangulum contentum axe portionis, & reliquo axis ſphæræ, vel ſphæroidis ſegmento, & eo, quod baſis portionis, & ſphæræ, vel ſphæroidis centra iungit, vnà cum binis tertiis partibus duorum cuborum: & eius qui à ſphæræ, vel ſphæroidis axis dimidio; & eius qui ab eo, quod ſphæræ, vel ſphæroidis, & baſis portionis centra iungit fit ſegmento; ad ſolidum rectangulum, quod axe portionis, & duobus ſphæræ, vel ſphæroidis axis fit dimidijs.



Sit maior portio A B C, ſphæræ, vel ſphæroidis A B C F, cuius centrum D: baſis autẽ portionis, circulus, vel ellipſis, cuius diameter A C: Et ſecta portione A B C per centrum D plano baſi A C parallelo, qua ratione ſectio erit circulus maximus, vel ellipſis ſimilis baſi

portionis: eſto ea cuius diameter K L, iungensque recta D E ſphæræ, vel ſphæroidis,& baſis portionis centra D E, atque producta incidat in ſphæræ, vel ſphæroidis ſuperficiem ad partes E in puncto F, & ad partes oppoſitas in puncto B: ſphæræ igitur, vel ſphæroidis axis axi portionis B E congruens erit B D E F, nam vertex portionis erit B: & hemiſphærio, vel hemiſphæroidi K B L ſit circumſcriptas cylindrus, vel cylindrica portio K H, cuius ſcilicet axis B D; & circa axim D E, alter cylindrus, vel portio cylindrica G L portioni K A C L circumſcripta: quorum circumſcriptorum ſolidorum vtriuſque communis baſis erit circulus, vel ellipſis circa K L. Itaque ex his compoſitus totus cylindrus, vel cylindri portio G H erit portioni A B C circumſcripta, habens axim B E, atque ideo eandem altitudinem A B C portioni, baſim autem, cuius diameter ſit G M ſimilem



& æqualem ei, quæ eſt circa K L. Dico portionem A B C ad cylindrum, vel portionem cylindricam G H, eſse vt ſolidum rectangulum contentum ipſis B E, E F, E D, vnà cum binis tertiis duorum cuborum, duabus ſcilicet cubi B D, & totidem cubi E D, ad ſolidum rectangulum contentum ipſis E B, B D, D F. Quoniam enim parall elepipeda eiuſdem altitudinis inter ſe ſunt vt baſes, erit vt rectangulum B E F vnà cum duabus tertiis E D quadrati ad rectangulum B D F, ideſt ad quadratum B D, ſiue D F, ita ſolidum ex B E, E F, E D, communi altitudine D E, vnà cum duabus tertiis cubi E D, ad ſolidum ex D E, B D,

B D, D F: ſed vt rectangulum B E F, vnà cum duabus D E quadrati, ad quadratum D F, ita oſtendimus eſſe portionem A K L C ad ſolidum G L; vt igitur eſt ſolidum ex B E, E F, E D, vnà cum duabus tertiis cubi E D, communi altitudine D E, ad ſolidum ex E D, B D, D F, ita erit portio A K L C ad ſolidum G L: ſed vt ſolidum ex E D, D B, D F, hoc eſt id, cuius altitudo E D, baſis B D quadratum, ad ſolidum ex E B, B D, D F, hoc eſt ad id, cuius altitudo B E, baſis quadratum B D, ita eſt altitudo, vel latus E D, ad altitudinem vel latum B E: hoc eſt ſolidum G L ad ſolidum G H; quippe quorum dictæ lineæ E D, B E ſunt axes; ex æquali igitur, vt ſolidum ex B E, E F, E D, vnà cum duabus tertiis cubi D E, ad ſolidum ex E B, B D, D F, cuius altitudo E B, baſis quadratum B D, ita erit portio A K L C ad ſolidum G H. Rurſus, quoniam ſolidum H K eſt hemiſphærij, vel hemiſphæroidis K B L ſeſquialterum; erit vt duæ tertiæ partes cubi B D ad cubum B D, ita hemiſphærium, vel hemiſphæroides K B L ad ſolidum K H: ſed vt cubus B D ad ſolidum ex B D, D F, & altitudine B E, hoc eſt vt altitudo B D ad altitudinem B E, ita eſt ſolidum K H ad ſolidum G H, quorum dictæ altitudines B D, B E ſunt axes, ex æquali igitur erit vt duæ tertiæ partes cubi B D ad ſolidum ex E B, B D, D F, ita hemiſphærium, vel hemiſphæroides K B L, ad ſolidum G H: ſed vt ſolidũ ex B E, E F, E D, vna cum duabus tertiis cubi E D ad ſolidum ex E B, B D, D F, erat portio A K L C ad cylindrum G H; vt igitur prima cum quinta ad ſecundam, ita tertia cum ſexta ad quartam, videlicet, vt duæ tertiæ cubi B D, vna cum duabus tertiis cubi B E, & ſolido ex B E, E F, E D ad ſolidum ex E B, B D, D F, ita erit ſphæræ, vel ſphæroidis maior portio A B C ad ſolidum, cylindrum ſcilicet, vel portionem cylindricam G H. Quod erat demonſtrandum.

PRO-

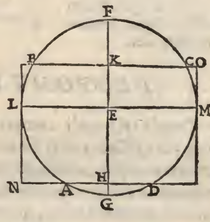
PROPOSITIO XX.

Omnis portio ſphæræ, vel ſphæroidis abſciſsá duobus planis parallelis centrum intercipientibus, ad cylindrum, vel cylindri portionem, cuius baſis æqualis eſt circulo maximo, vel ſimilis, & æqualis ellipſi per centrum baſibus portionis parallelæ, & eadem altitudo portioni, eam habet proportionem, quam duo ſolida rectangula ex ternorum ſphæræ, vel ſphæroidis axis ſegmentorum eundem terminum habentium alterutrius baſium portionis centrum, binis ſphæræ, vel ſphæroidis axem complentibus, & ſingulis axis portionis itidem à centro ſphæræ, vel ſphæroidis factis, vnà cum binis tertijs partibus duorum cuborum ex ſegmentis axis portionis à centro ſphæræ, vel ſphæroidis factis; ad ſolidum rectangulum, quod duobus ſphæræ, vel ſphæroidis axis dimidiis, & axe portionis continetur.

Sit portio A B C D ſphæræ, vel ſphæroidis, cuius centrum E, axis portionis K E H: ipſi autem portioni circumſcriptus cylindrus, vel cylindrica portio N O, vt in antecedenti, cuius communis ſectio cum ſphæra, vel ſphæroide A F D G, ſit circulus maximus, vel ellipſis circa diametrum L E M; quamobrem baſis ſolidi N O, eiuſdem altitudinis portioni A B C D circulus erit æqualis circulo maximo, vel ellipſis æqualis, & ſimilis ellipſi circa L M baſibus portionis parallelæ. Dico portionem A B C D

ad

ad cylindrum, vel portionem cylindricam N O, eſſe vt duo ſolida ad rectangula, alterum ex F H, H C, E H: alterum ex G K, K F, E K, vnà cum binis tertiis duorum cuborum ex E K, E H, ad ſolidum rectangulum ex G E, E F, K H. Producto enim axe K H, vt incidat in ſuperficiem in punctis F, G, ſit ſphæræ, vel ſphæroidis, ex demonſtratis, axis F K, E H G. Intelliganturque vt in antecedenti duo cylindri, vel cylindri portiones N M, L O, totius prædicti ſolidi N O: itemque duæ portiones ſphæræ, vel ſphæroidis A L M D, L B C M, quorum quatuor ſolidorum communis baſis eſt circulus, vel ellipſis circa L E M. Quoniam igitur vt in antecedenti oſtenderemus portionem A L M D ad ſolidum N M eſſe vt ſolidum ex F H, H G, E H, vnà cum duabus tertiis cubi E H ad ſolidum ex F E, E G, E H, communi altitudine E H: ſed vt ſolidum ex F E, E G, E H,



altitudine E H, ad ſolidum ex F E, B G, K H altitudine K H, ita eſt altitudo E H ad altitudinem K H, hoc eſt ſolidum N M ad ſolidum N O, quippe quorum ſunt axes E H, K H; ex æquali igitur erit vt ſolidum ex F H, H G, E H, vnà cum duabus tertiis cubi E H, ad ſolidum ex F E, E G, K H, ita portio A L M D, ad ſolidum N O. Eadem ratione oſtenderemus eſſe, vt ſolidum ex G K, K F, E K, vnà cum duabus tertiis cubi E K, ad ſolidum ex F E, E G, K H, ita portionem L B C M, ad ſolidum N O, vt igitur prima cum quinta ad ſecundam,

ita

ita tertia cum ſexta ad quartam; videlicet, vt duo ſolida, & quod fit ex F H, H G, E H, & quod ex G K, K F, E K, vnà cum duabus tertiis & cubi ex E H, & cubi ex E K, ad ſolidum ex F E, E G, K H, ita erit tota ſphæræ, vel ſphæroidis portio A B C D, ad cylindrum, vel portionem cylindricam N O. Quod demonſtrandum erat.

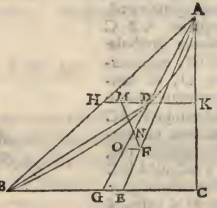


PROPOSITIO XXI.

Omnis trianguli comprehenſi ſectione parabola, & duabus rectis lineis, quarum altera ſectionem tangat, altera in eam incidat diametro ſectionis ex contactu æquidiſtans, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo recta linea ex contactu diuidens incidentem ita vt pars, quæ ſectionem attingit ſit ſeſquialtera reliquæ, ſic diuiditur, vt pars quæ eſt ad contactum ſit tripla reliquæ.

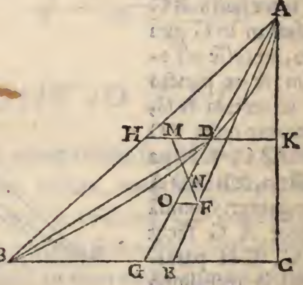
Sit triangulum A B C comprehenſum ſectione parabola A D B, & duabus rectis lineis, quarum altera A C tangat ſectionem in puncto A, reliqua autem B C, in eam incidens in puncto B, ſectionis diametro ex puncto A, æquidiſtans intelligatur: & per centrum grauitatis trianguli

guli A B C quod ſit F, ſit ducta recta A F E. Dico A F eſſe ipſius F E triplam : at B E ipſius E C ſeſquialteram. Completo enim triangulo rectilineo A B C, ſectiſque rectis lineis bifariam A B in puncto H, & A C in puncto K ducatur H D K, quæ parallela erit baſi B C: parabolæ igitur ſegmenti B D A diameter erit D H; in qua parabolæ A D B, cuius vertex D ſit centrum grauitatis M: trianguli autem rectilinei A B C centrum grauitatis N, & iungatur M N: producta igitur M N occurret trianguli A B C mixti centro grauitatis F. ſint igitur centra M, N, F, in eadem recta linea: & ducta recta A N G ſecet baſim B C bifariam in G puncto, neceſſe eſt enim: & ex puncto F ad rectam A G, ducatur recta F O ipſis B C, K H parallela, & B D, D A iungantur. Quoniã igitur A G ſecat B C, K H parallelas in rectolineo triangulo A B C,



in eaſdem rationes; ſecta erit H K bifariam à linea A G: cumque H D diameter parabolæ A D C, cuius vertex D, ſit parallela diametro parabolæ, cuius vertex A, atque ideo etiam B C incidenti parallela, erit D H pars ipſius K H: quoniam igitur in triangulo mixto A B C recta K D applicata parallela eſt ipſi B C, quæ itidem eſt parallela diametro parabolæ, cuius vertex A; erit vt A C ad A K potentia, ita B C ad D K longitudine, quod ſupra demonſtrauimus : ſed A C quadrupla eſt potentia ipſius A K;

quadrupla igitur B G ipſius D K: cum igitur B C ſit dupla ipſius K H, erit D K dimidia eiuſdem K H, & ſecta bifariam K H in puncto D: ſed recta A G ſecabat eandem K H bifariam; per punctum igitur D tranſibit A G. Quoniam igitur parabola A D C, cuius vertex D, ſeſquitertia eſt per Archimedem trianguli A D B, cuius duplum eſt triangulum A B G, ſicut & huius triangulum A B C; triangulum A B C quadruplum erit trianguli A D B: qualium igitur partium æqualium eſt triangulum A B C duodecim, talium erit triangulum A D B trium, & parabola A D B, cuius vertex D quatuor: duplum igitur erit triangulum A B C mixtum parabolæ A D B, cuius vertex D, & centrum grauitatis M: ſed trianguli ABC rectilinei eſt centrum grauitatis N, & F triãguli A B C mixti; dupla igitur erit M N ipſius N F, & M D ipſius O F, & D N ipſius N O, propter ſimilitudinem triangulorum: ſed & tota A N dupla eſt totius N G, ob centrum grauitatis N rectilinei trianguli A B C; reliqua igitur A D dupla eſt reliquæ G O. cum igitur A G ſit dupla ipſius A D, quadrupla erit A G ipſiuſque G O. quare & quadrupla A E ipſius F E ob parallelas: tripla igitur A F ipſius F E. Rurſus quoniam ex Archimede ſeſquialtera eſt D M ipſius M H, erit tota D H ad D M vt quinque ad tria, hoc eſt vt decem ad ſex: ſed M D erat dupla ipſius O F; tota igi-



tur

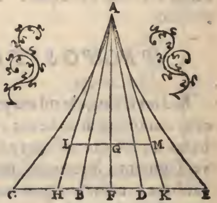
tur D H ad O F erit vt decem ad tria: ſed G C dupla eſt ipſius D H; igitur G C ad F O vt viginti ad tria: ſed quia tripla exiſtente A O ipſius O G, eſt tota A G ipſius A O ſeſquitertia, erit quoque G E, ipſius O F ſeſquitertia, propter ſimilitudinem triangulorum A G E, A O F, hoc eſt qualium partium æqualium O F trium, talium G E quatuor; qualium eſt G C hoc eſt B G viginti, talium erit E G quatuor, & E C ſexdecim: dempta igitur E G ex G C, & addita ipſi B G, qualium eſt E C ſexdecim: talium erit B E vigintiquatuor: ſed vt vigintiquatuor ad ſexdecim, ita ſunt tria ad duo, quæ proportio eſt ſeſquialtera, ſeſquialtera igitur erit B E ipſius E C, oſtenſa eſt autem A F ipſi F E tripla. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XXII.

Si duo triangula mixta prædicti generis verticem communem habeant, qui eſt contactus, & baſes æquales in eadem recta linea, vel continuas, vel ſegmento interiecto, tota extra figuram verſa cauitate; centrum grauitatis compoſiti ex vtroque eſt punctum illud, in quo recta linea à vertice ad bipartitæ rectæ prædictis ſectionibus interceptæ, in qua ſunt baſes dictorum triangulorum ſectionis punctum pertinens ſic diuiditur; vt pars, quæ eſt ad verticem ſit tripla reliquæ.

Sint duo prædicti generis triangula A B C, A D E habentia verticem A communem, qui eſt contactus rectarum cum parabolis, tangente A B. parabolam A C, &

A D parabolam A E: baſes autem æquales B C, D E parallelas parabolarum diametres per A, & in vna recta linea C E ſegmento B D interiecto: vtriuſque autem ſectionis A C, A E concauitas ſpectet extra figuram A C E: ſecta autem C E bifariam in F, iunctaque A F, ponatur A G tripla ipſius G F. Dico compoſiti ex triangulis A B C, A D E centrum grauitatis eſſe G. Poſita enim vtraque ſeſquialtera, C H ipſius H B, & E K ipſius K D, iunctisque A H, A K, ducatur per punctum G ipſi C E parallela ſecans A H, A K in punctis L, M. Quoniam igitur L M ipſi C E parallela ſecat eas quæ ex puncto A ad rectam C D ducuntur rectas lineas in eaſdem rationes, & eſt A G tripla ipſius G F; tripla erit vtraque A L ipſius L H, & A M ipſius M K: ſeſquialtera autem eſt C H ipſius H B, & E K ipſius K D; erit igitur L centrum grauitatis trianguli A B C, & M trianguli A D E per præcedentem.



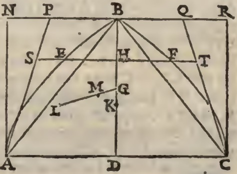
Rurſus quoniam abſoluantur triangula rectilinea A C B, A E K, & æqualia erunt propter æquales baſes, poſita inter eaſdem parallelas, & vtrumque ſeſquialterum eius trianguli mixti, quod comprehendit, ex demonſtratione antecedentis; æqualia igitur erunt triangula mixta A B C, A D E, ſiquidem ſunt æqualium ſubſeſquialtera. Et quoniam componendo, & permutando eſt vt C B ad D E ita B H ad D K, æqualis erit B H ipſi D K: ſed ſi ab æqualibus poſitis C F, F E ipſas C B, D E æquales au-

feras

ſeras, reliquæ B F, F D æquales erunt; tota igitur F H toti F K æqualis eſt: in triangulo autem A H K recta A F ſecat L M, H K parallelas in eaſdem rationes; erit igitur L G æqualis ipſi G M; cum igitur æqualium triangulorum A B C, A D E centra grauitatis ſint L, M; erit compoſiti ex vtroque centrum grauitatis G. Idem oſtenderemus, quod proponitur, & ſi baſes prædictorum triangulorum ſint continuæ. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO XXIII.

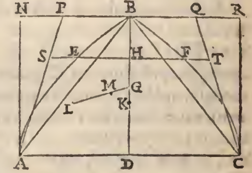
Si duæ parabolæ in eodem plano circa æquales diametros indirectum inter ſe conſtitutas, ita vt vertices ſint extrema ex diametris compoſitæ, communem habuerint aliquam ordinatim ad diametrum applicatarum, & vertices cum puncto conuenientiæ iungantur rectis lineis: centrum grauitatis vtriuſque portionis ijs rectis lineis abſciſſæ, rectam lineam, quæ terminum communem diametrorum, & concurſum parabolarum iungit bifariam diuidit.



Circa æquales diametros A D, D C indirectum inter ſe conſtitutas, verticibus A, C, duæ parabolæ in eodem plano communē habeant aliquam B D ordi-

natim

natim ad vtramque diametrorum applicatarum, iunctiſque AB, BC, ſit ſecta BD bifariam in puncto G. Dico G eſſe centrum grauitatis duarum portionum AEB, BFE ſimul. Si enim hoc non eſt, ſit aliud punctum L. & compleantur parallelogramma ANBD, DBRC, hoc eſt totum AR parallelogrammum: & ſecta BG bifariam in puncto H, ponatur DK ipſius BD pars tertia, vt punctum K ſit trianguli ABC centrum grauitatis. Poſita autem ſeſquialtera BP ipſius PN, & BQ ipſius QR, iunctiſque AP, CQ, ducatur per punctum H ipſi AC, vel NR parallela, cum ipſis AP, CQ conueniens in punctis ST: & iuncta LG, ſi punctum L non ſit in linea BD, eſto LM quintupla ipſius MG. Quoniam igitur ob parallelas AC, PQ, ST in trapezio APQC, eſt vt DH ad HB, ita AS ad SP, & CT



ad TQ, erit AS ipſius SP, & CT ipſius TQ tripla: ſed eſt BP ſeſquialtera ipſius PN, & BQ ipſius QR; mixti igitur trianguli ANB centrum grauitatis erit S, & trianguli mixti CRB centrum grauitatis T. cum igitur BP, BQ proportionales æqualibus NB, BR inter ſe ſint æquales, & ſecta AC bifariam in puncto D; etiam ijs parallela ST ſecta erit bifariam in puncto H: iungit autem ST centra grauitatis mixtorum triangulorum ANB, BRC; compoſiti igitur ex vtroque centrum grauitatis erit H. Rurſus quoniam ex quadratura parabolæ, ſemiparabola ABD ſeſquitertia eſt trianguli BDA, erit triangulum BDA ſeſquialterum mixti trianguli ANB:

eadem

eadem ratione triangulum B D C, trianguli C R B mi xti erit ſeſquialterum: totum igitur triangulum A B C ſeſquialterum eſt compoſiti ex triangulis mixtis A N B, C R B. Et quoniam quarta pars eſt G H ipſius B D, & D K tertia, D G verò dimidia; qualium duodecim partium æqualium eſt B D, talium erit D K quatuor, & G H trium, & D G ſex, & reliqua K G duarum; ſeſquialtera igitur eſt G H ipſius G K: quare vt triangulum A B C ad compoſitum ex prædictis triangulis mixtis, ita ex contraria parte eſt H G ad G K: cum igitur dicti compoſiti ſit centrum grauitatis H, trianguli autem A B C centrum grauitatis K; erit dicti compoſiti, & trianguli A B C ſimul centrum grauitatis G. Rurſus, quoniam triangulum A B C ſeſquialterum eſt compoſiti ex triangulis mixtis ſupra dictis, & compoſitum ex duabus ſemiparabolis A B D, C B D ſeſquitertium trianguli A B C; erit compoſitum ex triangulis mixtis vnà cum triangulo A B C, quintuplum compoſiti ex portionibus A E B, B F C; hoc eſt vt ex contraria parte L M ad M G: cum igitur G ſit centrum grauitatis compoſiti ex triangulis mixtis, & triangulo A B C, & compoſiti ex portionibus A E B, B F C centrum grauitatis L; erit vtriuſque dicti compoſiti, hoc eſt totius A R parallelogrammi centrum grauitatis L: ſed & punctum G ex primo libro eſt centrum grauitatis parallelogrammi A R; eiuſdem igitur parallelogrammi A R erunt duo centra grauitatis G, L. Quod fieri non poteſt: duarum igitur portionum A E B, B F C ſimul centrum grauitatis erit G. Quod eſt propoſitum.

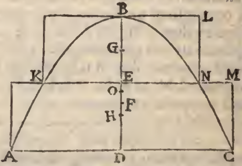
PROPOSITIO XXIIII.

Omnis figuræ circa axim in alteram partem deficientis, cuius baſis eſt circulus, vel ellipſis, ſiue

baſes

baſes ſunt circuli, vel ellipſes, reliqua autem ſuperficies tota interius concaua, centrum grauitatis eſt in dimidio axis ſegmento, quod baſim, vel maiorem baſim attingit.

Sit figura circa axim in alteram partem deficiens A B C, cuius axis B D, baſis, vel maior baſis circulus, vel ellipſis circa diametrum A C, reliqua autem ſuperficies tota interius concaua: ſecto autem axe B D bifariam in puncto G, ſit ſolidi A B C centrum grauitatis F nempe in axe B D. Dico punctum F eſſe in ſegmento E D. Secto enim ſolido A B C, & figura per axem plano per punctũ E baſi, vel baſibus parallelo, fiat ſectio circulus, vel ellipſis ſimilis baſi, per diffinitionem, & ſectionis diameter K N: deinde figura quædam ex



duobus cylindris, vel cylindri portionibus K L, A M circa axes B E, E D, eiuſdem altitudinis circumſcribatur ſolido A B C: ſecanturque bifariam B E in puncto G, & E D in puncto H. totius autem figuræ circumſcriptæ ſit centrum grauitatis O, nempe in axe B D. Quoniam igitur propter bipartitorum axium ſectiones G, H, eſt ſolidi K L centrum grauitatis G: ſolidi autem A M centrum grauitatis H, erit in linea G H totius ſolidi A L centrum grauitatis O, & vt ſolidum A M ad ſolidum K L, ita G O ad O H: ſed maior eſt proportio ſolidi A M ad ſolidum K L

quàm

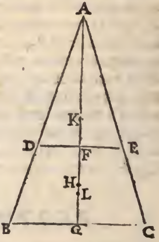
quàm GE, ad EH; maior igitur proportio eſt GO ad OH, quàm GE ad EH: & componendo, maior proportio GH ad HO, quàm eiuſdem GH ad HE; minor igitur OH erit quàm EH, & punctum O propinquius puncto D quàm punctum E: verum quoniam ex ijs, quæ in præcedenti libro demonſtrauimus, propoſitæ figuræ ſolidæ ABC centrum grauitatis eſt puncto D propinquius, quàm cuiuslibet figuræ ex cylindris, vel cylindri portionibus æqualium altitudinum ipſi circumſcriptæ, erit punctum F propinquius puncto D quàm punctum O; multo igitur puncto D erit propinquius punctum F quàm punctum E; ergo infra punctum E, & in linea ED cadet ſolidi ABC centrum grauitatis F. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXV.

Omnis fruſti coni, vel portionis conicæ centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo eius axis ſic diuiditur, vt pars quæ minorem baſim attingit aſſumens quartam partem axis ablati coni, vel portionis conicæ, ſit ad eam, quæ inter poſtremam ſectionem, & quartæ partis abſciſſę ad baſim axis totius coni terminum interijcitur, vt cubus, qui fit ab axe totius, ad cubum qui fit ab axe ablati coni.

Sit coni, vel portionis conicæ ABC fruſtum BDEC, cuius axis FG: conus autem, vel coni portio ablata ADE: ſint centra grauitatis H ſolidi ABC, & K ſolidi ADE, & L fruſti DC: quæ centra præterquam quod

ſunt omnia in axe AG, centrum L cadet infra centrum H, ex ijs, quæ in primo libro demonſtrauimus. Dico eſſe KL ad LH vt cubum ex AG ad cubum ex AF. Quoniam enim ob centra grauitatis K, H, L, eſt vt fruſtum DC ad ſolidum ADE, ita ex contraria parte KH ad HL; erit componendo, vt ſolidum ABC ad ſolidum ADE, ita KL ad LH: ſed vt ſolidũ ABC ad ſolidum ADE, ita eſt cubus ex AG ad cubum ex AF: triplicata enim eſt vtraque proportio eiuſdem, quæ eſt ipſius AG ad ipſam AF, propter ſimilitudinem ſolidorum; vt igitur eſt cubus ex AG ad cubum ex AF, ita erit KL ad LH. Quod demonſtrandum erat.

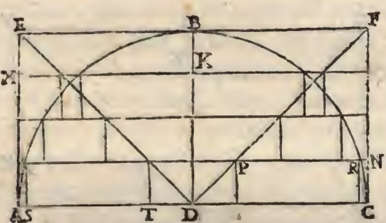


PROPOSITIO XXVI.

Reſidui ſolidi ex cylindro, vel portione cylindrica hemiſphærio, vel hemiſphæroidi circumſcripta, dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars baſim attingens hemiſphærij, vel hemiſphæroidis ſit tripla reliquæ.

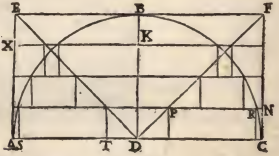
Eſto hemiſphærio, vel hemſphæroidi ABC, cuius axis BD, circumſcriptus cylindrus, vel portio cylindrica AF: & ponatur DK ipſius KB tripla. Dico reliqui ex ſolido

do A F dempto A B C, centrum grauitatis eſſe K. Nam ſuper baſim circulum, vel ellipſim, cuius diameter E F ſimilem, & oppoſitam ſolidi A B C, vel A F baſi, cuius diameter A C, ſtet cylindrus, vel portio cylindrica E D F: vt ſit axis B D communis quatuor ſolidis A B C, E D F, A F, & reliquæ figuræ dempto ſolido A B C comprehenſæ ſuperficie cylindrica, & circulo, vel ellipſe circa E F, & dimidia ſuperficie ſphærica interiori, cuius figuræ ſolidæ ponimus centrum grauitatis K. Secto igitur axe B D bifariam, & ſingulis eius partibus rurſus bifariam, ductiſque per puncta ſectionum planis quibuſdam planis



prædictarum baſium oppoſitarum parallelis, ſecta ſint quatuor prædicta ſolida, quorum, excepto propoſito reſiduo, ſectiones omnes erunt circuli, vel ellipſes inter ſe ſimiles, & in ſolido A F etiam æquales, quarum omnium diametri eiuſdem rationis erunt in eodem plano, in quo ſit parallelogrammum per axim A E F C: ſolidi autem dicti reſidui ſectiones, reſidua ſectionum ſolidi A B C. At circa cõmunes axes inter ſe æquales ſegmenta axis B D, & inter eadẽ plana parallela, ſuper baſes ſectiones duorum ſolidorum A B C, E D F, cylindri, vel portiones cylindricæ conſiſtant altitudine, & multitudine æquales; ita vt duarum figurarum ex ijs compoſitarum altera ſit circumſcripta ſoli-

do E D F, altera ſolido A B C inſcripta. hac igitur ablata ex ſolido A F, figura relinquetur ex reſiduis cylindrorum, vel cylindri portionum altitudine, & multitudine æqualibus ijs cylindris, vel cylindri portionibus, ex quibus conſtat alterutra figurarum ſolidis A B C, D E F circumſcriptarum: eruntque ex ſuperius demonſtratis dicta reſidua, & cylindri vel cylindri portiones, quæ circa ſolidum E D F, inter ſe æqualia prout inter ſe reſpondent inter eadem plana parallela, vt eſt exempli gratia reliquum ſolidi A N dempto ſolido S R, æquale ſolido T P: & ſic deinceps: ſummus autem X F cylindrus, vel portio cylindrica



eſt communis: Atqui bina hæc iam dicta ſolida centrum grauitatis habent commune communis bipartiti axis ſectionem in eadem recta linea B D, in qua eſt etiam ſolidi X F communis centrum grauitatis. duarum igitur dictarum figurarum ſolido E D F, & prædicto reſiduo circumſcriptarum idem aliquod punctum in axe B D erit commune centrum grauitatis: fieri autem poteſt, quod in ſecundo libro demonſtrauimus, vt duæ dictæ figuræ ſuperent vnaquæque ſibi inſcriptam minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita. ex demonſtratis igitur in primo libro; duo ſolida circa axem B D in alteram partem deficientia commune habebunt in axe B D centrum grauitatis: ſed ſolidi, ideſt co-

ni,

ni, vel portionis conicæ E D F eſt centrum grauitatis K: reliqui igitur ex cylindro, vel portione cylindrica A F dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide A B C centrum grauitatis erit idem K. Quod erat demonſtrandum.

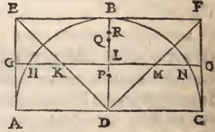
PROPOSITIO XXVII.

Si hemiſphærium, vel hemiſphæroides vna cum cylindro, vel cylindri portione ipſi circumſcripta ſecetur plano baſi parallelo; reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica abſciſſa ad partes verticis, dempta illa quæ abſciſſa eſt ſimul minori, & ſphæræ, vel ſphæroidis portione, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo eius axis ſic diuiditur, vt quæ inter hanc poſtremam ſectionem, & centrum baſis vnà abſciſſæ portionis interijcitur, aſſumens quartam partem ſegmenti, quod dictæ baſis, & ſphæræ, vel ſphæroidis centra iungit, ſit ad ſui ſegmentum, quod inter poſtremam ſectionem, & quartæ partis axis hemiſphærij, vel hemiſphæroidis ad verticem abſciſſæ terminum interijcitur, vt cubus axis hemiſphærij, vel hemiſphæroidis, ad cubum eius, quæ baſis portionis & hemiſphærij, vel hemiſphæroidis centra iungit. Reliqui autem ex cylindro, vel portione cylindrica vnà abſciſſa cũ reliqua hemiſphærij, vel hemiſphæroidis portione, quæ eſt ad baſim, dempta hac portione centrum, grauitatis eſt punctum illud, quod quartam partem abſcindit axis portionis ad

eius

eius minorem baſim terminatam.

Eſto hemiſphærio,vel hemiſphæroidi A B C, cuius axis B D, baſis circulus vel ellipſis, cuius diameter A C circumſcriptus cylindrus, vel cylindri portio A F, cuius intelligatur reliquum dempto A B C. quæ ſolida ſecans planum per A C, B D, faciat ſectiones ſemicirculum, vel ſemiellipſim A B C, & parallelogrammum per axem A E F C; & per quodlibet punctum L axis B D,planum baſibus A C, E F ſolidi A F parallelũ,ſecans prædicta ſolida A B C, A F,faciat ſectiones circulos,vel ellipſes ſimiles,& in ſolido A F etiam æquales ijs,quæ circa AC,E F:earum autem diametros,ſectiones cum parallelogrãmo A E F C, ipſam G O: & cum ſemicirculo,vel ſemiellipſe A B C,ipſam H N. Itaque habebimus figuram quandam ſolidam G H B N O reſiduum cylindri,vel portionis cylindricæ G F dempta minori ſphæræ,vel ſphæroidis portione HBN,cuius axis erit B L. Sumpta igitur B Q quarta parte axis B D,& L P quarta parte ipſius D L fiat vt cubus ex B D ad cubum ex D L, ita P R ad R Q. Dico reſidui G H B N O centrum grauitatis eſſe R. Reliqui autem ex cylindro, vel portione cylindrica A O dempta portione A H N C, centrum grauitatis eſſe P.



Nam ſuper baſim circulum,vel ellipſim E F, ſtet conus,vel portio conica E D F: ſitque prædicto plano per L abſciſſus conus,vel coni portio K D M, cuius axis D L, quæ propter planum ſecans baſi E F parallelum, ſimilis erit toti cono, vel portioni conicæ E D F. Quoniam igitur B Q eſt axis B D pars quarta, & L P pars quarta ipſius D L;

erunt

erunt centra grauitatis ſolidorum, Q ipſius E D F, & P ipſius D K M. Et quoniam ſolidum D E F ad ſolidum D K M eſt vt cubus ex B D ad cubum ex D L, hoc eſt vt ſolidum E D F ad ſolidum K L M, & vt P R ad R Q; erit diuidendo, vt fruſtum E K M F ad ablatum K D M, ita ex contraria parte P Q ad Q R: cum igitur ſint centra grauitatis P ſolidi D K M, & Q ſolidi D E F; erit reliqui fruſti E K M F centrum grauitatis R: ſed qua ratione in præcedenti conſtat, reliqui ex ſolido A F, dempto ſolido A B C centrum grauitatis eſſe Q, eadem concluditur idem eſſe centrum grauitatis reliqui ex ſolido G F, dempta portione H B N, quod & fruſti E K M F, nempe punctum R: Et quoniam P eſt centrum grauitatis coni, vel portionis conicæ K D M, erit idem P centrum grauitatis reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica A O dempta portione A H N C. Manifeſtnm eſt igitur propoſitum.

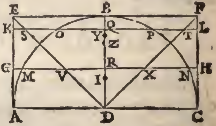
PROPOSITIO XXVIII.

Iiſdem poſitis ſolidis, vt in antecedenti, ſectiſque per duo quælibet puncta axis duplici plano baſi parallelo, reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica dictis duobus planis intercepta dempta ſphæræ, vel ſphæroidis portione ipſi inter eadem plana reſpondente, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo eius axis ſic diuiditur, vt quæ inter hanc poſtremam ſectionem, & centrum maioris baſis vnà abſciſsæ portionis interijcitur, aſſumens quartam partem ſegmenti, quod prædictæ baſis, & ſphæræ vel ſphæroidis centra iungit,

ſit

ſit ad ſui ſegmentum, quod inter poſtremam ſectionem, & quartæ partis eius, quæ ſphæræ, vel hemiſphærij, & minoris baſis portionis centra iungit ad minorem baſim abſciſsæ terminum interijcitur, vt cubus eius, quæ minoris baſis, & ſphæræ, vel ſphæroidis, ad cubũ eius, quę ſphæræ, vel ſphæroidis, & maioris baſis portionis centra iungit.

Iiſdem poſitis ſolidis, vtque in antecedenti ponebantur A B C, A F; per duo quælibet puncta R Q axis B D ſecentur poſita ſolida duobus planis baſi, quæ circa A C, circulo ſcilicet, vel ellipſi parallelis: quibus planis intercepta hemiſphærij, vel hemiſphæroidis portio ſit M O P N, vnà cum cylindro, vel portione cylindrica G L parte ipſius A F, quorũ ſolidorum cõmunis axis vnà abſciſſus ab axe B D ſolidi A B C, ſit R Q: & ſumptis quartis partibus R I ipſius D R, & Q Z ipſius D Q, fiat vt cubus ex D Q ad cubum ex D R, ita I Y ad Y Z. Dico reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica G L dempta portione M O P N, centrum grauitatis eſſe Y.

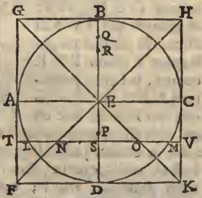


Facta enim conſtructione coni, vel portionis conicæ E D F, vt in ſuperioribus, erunt ſimilium conorum, vel coni portionum S D T, V D X, eadem ordine axes D Q, D R: propter igitur factas diuiſiones, erunt cẽtra grauitatis Z ſolidi S D T & I ſolidi V D X, & demonſtratio ſimilis antecedenti. dicti igitur reſidui G M O P M H centrum grauitatis Y. Quod eſt propoſitum.

PRO-

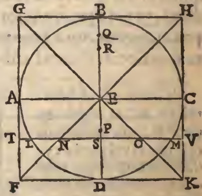
PROPOSITIO XXIX.

Si ſphæra, vel ſphæroides vnà cum cylindro, vel portione cylindrica ipſi circumſcripta ſecetur plano, haud per centrum, baſibus ſolidi circumſcripti parallelo; reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica ad maioris portionis ſphæræ, vel ſphæroidis partes abſciſſa, dempta ſphæræ, vel ſphæroidis maiori portione, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo dicti reliqui ſolidi axis ſegmentum inter duas quartas partes extremas ſegmentorum eiuſdem axis, quæ à centro ſphæræ, vel ſphæroidis fiunt interiectum, ſic diuiditur, vt pars propinquior baſi ſit ad reliquam, vt prædictorum, quæ à centro fiunt axis ſegmentorum maioris cubus ad cubum minoris.



Sit ſphæræ, vel ſphæroidi A B C D cuius centrum E, circumſcriptus cylindrus, vel portio cylindrica F G H K, cum quibus planum per axim communem B E D, faciat ſectiones, parallelogrammum per axim F G H K, & circulum, vel ellipſim A B C D: quas figuras vnà cum dictis ſolidis ſecans planum baſibus ſolidi circumſcripti paralle-

lum per quoduis punctum S dimidij axis E D, facienſque ſectiones circulos, vel ellipſes ſimiles ſcilicet baſibus oppoſitis ſolidi F H, & ſectionum diametros L M, T V, abſcindat ſolidi A B C D maiorem portionem L B M, & ſolidi F H cylindrum, vel portionem cylindricam T H, cuius axis B E S: duorum autem ſegmentorum B E, E S ſumptis duabus quartis partibus extremis B Q, P S, fiat vt cubus ex B E ad cubum ex E S, ita P R ad R Q. Dico reliquæ figuræ ex cylindro, vel portione cylindrica T H, portioni L B M circumſcripta, dempta portione L B M, centrum grauitatis eſſe R. Sectis enim parallelogrammo T H, & ſolidis L B M, T H, plano per centrum E, baſibus ſolidi T H parallelo, fit ſectio, (vna enim communis erit vtrique ſolido) circulus, vel ellipſis, cuius diameter A E C in parallelogrammo T H diametris T V, G H oppoſitarum baſium parallela. Tum ſuper baſes oppoſitas circulos, vel ellipſes circa G H, F K ſtent coni, vel portiones conicæ G E H, F E K: & planum per T V baſi circa F K parallelum abſcindat à ſolido F E K conum, vel coni portionem N E O ſimilem vtique ipſi F E K, hoc eſt



ipſi G E H, propter ſimiles baſes, & ſimilia triangula per axim in eodem parallelogrammo F H. Solidi itaque N E O, ex ijs, quæ in primo libro demonſtrauimus, centrum grauitatis erit P; quemadmodum & Q ſolidi N E O. Quoniam igitur tàm ſolidi G E H ad ſolidum N E O propter ſimilitudinem, quàm cubi ex B E

ad

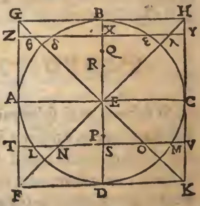
ad cubum ex E S, triplicata eſt proportio axis, vel lateris B E, ad axem, vel latus E S; erit vt cubus ex B E ad cubum ex E S, ita ſolidum G E H ad ſolidum N E O, hoc eſt in eadem proportione, quæ eſt ex contraria parte ipſius P R ad R Q. Cum igitur P ſit centrum grauitatis ſolidi N E O, & Q ſolidi G E H; erit compoſiti ex vtroque centrum grauitatis R. Rurſus, quoniam reliquum ſolidi A H dempto hemiſphærio, vel hemiſphæroide A B C, æquale eſt ſolido G E H: & reliquum ſolidi T C dempto ſolido A L M C æquale ſolido N E O; erit vt ſolidum G E H ad ſolidum N E O, ideſt ex contraria parte, vt P R ad R Q, ita reliquum ſolidi A H dempto A B C, ad reliquum ſolidi T C, dempto A L M C: ſed reliqui ex ſolido A H dempto A B C eſt centrum grauitatis Q: & reliqui ex ſolido T C dempto A L M C, centrum grauitatis P, ex ſuperius demonſtratis; totius igitur reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica T H dempta ſphæræ, vel ſphæroidis maiori portione L B M centrum grauitatis eſt R. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXX.

Si ſphæra, vel ſphæroides vnà cum cylindro, vel portione cylindrica ipſi circumſcripta, ſecetur duobus planis baſi ſolidi circumſcripti parallelis, centrum intercipientibus, & ab eo non æqualiter diſtantibus; reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica dictis planis intercepta, dempta portione ſphæræ, vel ſphæroidis ipſi reſpondente, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo prædicti reliqui ſolidi axis ſegmentum in-

ter quartas partes extremas eiuſdem axis ſegmentorum, quæ à centro ſphæræ, vel ſphæroidis fiunt interiectum ſic diuiditur, vt pars maiori baſi propinquior ſit ad reliquam, vt prædictorum axis ſegmentorum cubus maioris ad cubum minoris.

Iiſdem poſitis, & conſtructis, quæ in antecedenti, rurſus per quodlibet axis B E punctum X, ductum planum baſibus ſolidi F H parallelum, ſecansque vnà cylindrum, vel portionem cylindricam F H, & ſphæram, vel ſphæroides A B C D: eſto duobus planis per T V, Z Y, inter ſe parallelis, & centrum E intercipientibus abciſſa ſphæræ, vel ſphæroidis portio L δ ε M vnà cum cylindro, vel portione cylindrica T Y: & ſumatur ipſius E X pars quarta X Q, qualis eſt & P S ipſius E S: & vt eſt cubus ex E X ad cubum ex E S, ita fiat P R ad R Q. Dico reliqui ex cylindro, vel portione cylindrica T Y dempta ſphæræ, vel ſphæroidis portione L δ ε M, centrum grauitatis eſſe R. Eſto enim conus, vel coni portio θ E λ abſciſſa prædicto plano per Z Y, & communibus axibus E S, E X, ſimili igitur demonſtratione antecedentis manifeſtum eſt quod proponebatur.

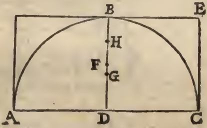


PRO-

PROPOSITIO XXXI.

Hemiſphærij, vel hemiſphæroidis centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſit diuiditur, vt pars ad verticem ſit ad reliquam vt quinque ad tria.

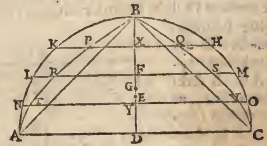
Eſto hemiſphærium, vel hemiſphæroides A B C, cuius axis B D, baſis circulus, vel ellipſis, cuius diameter A D C: ſitque ſolidi A B C centrum grauitatis G, nempe in axe B D. Dico B G ad G D eſſe vt quinque ad tria. Nam circa axim B D ſuper baſim circulum, vel ellipſim circa A C, ſtet circumſcriptus ſolido A B C cylindrus, vel portio cylindrica A E, & ſecta B D bifariam in F, rurſus F B bifariam ſecetur in puncto H. Quoniam igitur ſolidum A B C eſt ſolidi A E, ſubſeſquialterum, erit diuidendo ſolidum A B C reliqui ex ſolido A E duplum cum igitur ſint centra grauitatis, G ſolidi A B C, & H prædicti reliqui, & F totius A E; quo fit vt ex contraria parte ſit vt ſolidum A B C ad prædictum reſiduum, ita H F ad F G, erit H F dupla ipſius F G; quadrupla igitur B F ipſius F G: ſed talium quatuor partium eſt B F, qualium B D eſt octo, cum ſit B F dimidia ipſius B D; qualium igitur octo eſt B D, talium erit B G quinque, & G D trium. Quod demonſtrandum erat.



ALI-

ALITER.

Dico hemiſphærij, vel hemiſphæroidis A B C centrum grauitatis eſſe G. In plano enim ſemicirculi, vel ſemiellipſis per axem B D deſcriptæ intelligantur duæ parabolæ, quarum diametri A D, D C, & communiter ad vtranque ordinatim applicata ſit B D: & connectuntur rectæ A B, B C: ſumptis autem in B D tribus quibuslibet punctis, æqualia axis ſegmenta X F, F Y intercipientibus, ſecent per ea puncta tres figuras hemiſphærium, vel hemiſphæroides A B C, & ſemicirculum, vel ſemielli-



pſim per axem, & figuram planam A R B S C, quæ lineis parabolicis A R B, B S C, & recta A C continetur, plana quædam baſi hemiſphærij, vel hemiſphæroidis parallela. Erunt igitur ſectiones hemiſphærij, vel hemiſphæroidis circuli, vel ellipſes ſimiles baſi, quarũ diametri ſint K X H, L F M, N Y O: figuræ autem A R B S C ſectiones rectæ lineæ P X Q, R F S, T Y V. Quoniam igitur per 1 v huius eſt vt K H ad L M potentia, ita K Q ad F S hoc eſt in earum duplis P Q ad R S longitudine; erit vt P Q ad R S, ita circulus, vel ellipſis K H ad circulum vel ſimilem ellipſim L M. Eadem ratione erit vt R S ad T V, ita circulus, vel ellipſis L M ad circulum, vel elli-

ellipſim N O. minor autem proportio eſt P Q ad R S, quam R S ad T V circuli igitur, vel ellipſis K H ad circulũ, vel ellipſim L M, minor erit proportio q̃ circuli,vel ellipſis L M ad circulum, vel ellipſim N O: & duæ figuræ hemiſphærium, vel hemiſphæroides A B C, & plana A R B S C, ſunt circa axim, vel diametrum B D in alteram partem deficientes, quales definiuimus; vtriuſque igitur dictæ figuræ vnum erit commune centrum grauitatis. Rurſus poſito puncto F in medio axis B D, & F G ipſius G E tripla, quoniam ponitur B G ad G D vt quinque ad tria; qualium partium æqualium ipſi E G eſt F G trium, talium erit B G quindecim, & G D nouem, & talis E G vna: dempta igitur G E ab ipſa D G, & addita ipſi B G, qualium partium eſt B E ſexdecim, talium erit E D octo; dupla igitur B E ipſius E D, & trianguli A B C centrum grauitatis E. Rurſus quoniam ex quadratura parabolæ, duarum portionum A R B, B S C triangulum A B C eſt triplum; hoc eſt vt F G ad G E, ita ex contraria parte triangulum A B C ad duas portiones A R B, B S C: Sed trianguli A B C eſt centrum grauitatis E, & duarum portionum A R B, B S C ſimul per XXIII huius, centrum grauitatis F, totius igitur figuræ A R B S C centrum grauitatis erit G, commune autem hoc centrum grauitatis eſt hemiſphærio, vel hemiſphæroidi A B C. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

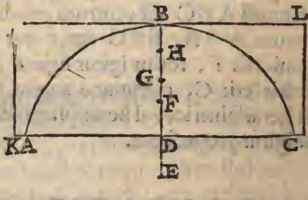
PROPOSITIO XXXII.

Omnis minoris portionis ſphæræ, vel ſphæroidis centrum grauitatis eſt in axe primum bifariam ſecto: deinde ſecundum centrum grauitatis reliqui ſolidi dempta portione ex cylindro, vel

portione

portione cylindrica abſciſſo, vel abſciſſa vnà cum portione, ex cylindro, vel portione cylindrica, ſphærę, vel ſphæroidis circa axim axi portionis cō gruentem circūſcripta; in eo puncto, in quo dimidius axis portionis baſim attingēs ſic diuiditur, vt pars prima, & ſecunda ſectione terminata, ſit ad totam ſecunda, & poſtrema ſectione terminatam, vt rectangulum contentum axe portionis, & reliquo ſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis ſegmento, vnà cum duabus tertijs quadrati axis portionis, ad ſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis axi portionis congruentis quadratum.

Sit ſphæræ, vel ſphæroidis minor portio A B C, cuius axis B D: & in eo centrum grauitatis F: ſecto autem axe B D primum bifariam in puncto G, & rurſus B G in puncto H centro grauitatis reliqui dempta portione ex cylindro, vel portione cylindrica K L circa axim B D, abſciſſo, vel abſciſſa eodem plano cum



portione A B C, & cylindro, vel portione cylindrica, quæ circumſcriberetur ſphæræ, vel ſphæroidi, cuius eſt portio A B C, circa axim, cuius dimidium B D E. Dico G H ad H F, (nam cadet centrum F infra bipartiti axis B D ſectionem G, ex XXIII huius) eſſe vt rectangulum B D E vnà cum duabus tertijs B D quadrati ad quadratum B E. Quoniam enim totius ſolidi K L centrum

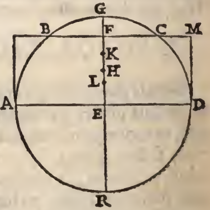
trum grauitatis eſt G, & F portionis A B C, & H reliqui ex K L dempta A B C portione; erit vt portio A B C ad prædictum reſiduum, ita ex contraria parte H G ad G F: & componendo, vt ſolidum K L ad prædictum reſiduum, ita H F ad F G: & per conuerſionem rationis, vt ſolidum K L ad portionem A B C, ita F H ad H G: & conuertendo, vt portio A B C ad ſolidum K L, ita G H ad H F: ſed vt portio A B C ad ſolidum K L, ita eſt rectangulum B D E vnà cum duabus tertiis quadrati B D ad quadratum E B; vt igitur rectangulum B D E, vnà cum duabus tertiis quadrati B D, ad quadratum E B, ita erit G H ad H F. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO XXXIII.

Omnis portionis ſphæræ, vel ſphæroidis abſciſſæ duobus planis parallelis, altero per centrum acto, centrum grauitatis eſt in axe primum bifariam ſecto: deinde ſumpta eius quarta parte ad minorem baſim; in eo puncto, in quo dimidius axis maiorem baſim attingens ſic diuiditur, vt pars axis prima, & ſecunda ſectione terminata, ſit ad eam, quæ prima, & poſtrema ſectione terminatur, vt rectangulum contentum ſphæræ, vel ſphæroidis axis axi portionis congruentis ijs ſegmentis, quæ fiunt à centro minoris baſis portionis, vnà cum duabus tertiis quadrati axis portionis; ad ſphæræ, vel ſphæroidis dimidij axis quadratum.

Sit ſphæræ, vel ſphæroidis cuius centrum E portio

A B C D abſciſsa duobus planis parallelis altero ducto per E, & ſectionem faciente circulum maximum, vel ellipſim per centrum, cuius diameter A E D: axis autem portionis ſit E F, cui congruens ſphæræ, vel ſphæroidis axis G F E R: ſit autem F E bifariam ſectus in puncto H: & F H bifariam in puncto K, ſitque in E H, ſic enim erit, portionis A B C D centrum grauitatis L. Dico eſſe H K ad K L, vt rectangulum G F R, vnà cum duabus tertiis quadrati E F ad quadratum E G. Sit enim cylindrus, vel portio cylindrica A M circa axim F E abſciſſa ijſdem planis cum portione A B C D, ex cylindro, vel portione cylindrica circa axim G R ſphæræ, vel ſphæroidi A G D R circumſcripta. Quoniam igitur ſolidi A M eſt centrum grauitatis H: reliqui autem dempta A B C D portione centrum grauitatis K: & portionis A B C D ponitur centrum grauitatis L; erit



vt portio A B C D ad reliquum ſolidi A M, ita ex contraria parte K H ad H L. componendo igitur vt in antecedenti, & per conuerſionem rationis, & conuertendo, erit vt portio A B C D ad ſolidum A M; hoc eſt vt rectangulum G F R, vnà cum duabus tertiis quadrati E F ad quadratum E G, ita H K ad K L. Quod demonſtrandum erat.

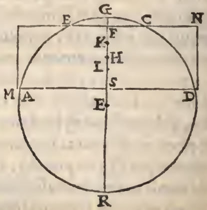
PRO-

PROPOSITIO XXXIIII. 160

Omnis portionis ſphæræ, vel ſphæroidis abſciſſæ duobus planis parallelis, neutro per centrum acto, nec centrum intercipientibus, centrum grauitatis eſt in axe, primum bifariam ſecto: deinde ſecundum centrum grauitatis reliqui dempta portione ex cylindro, vel portione cylindrica, abſciſſo, vel abſciſſa vnà cum portione à cylindro, vel portione cylindrica ſphæræ, vel ſphæroidi circa eius axem axi portionis congruentem circumſcripta; in eo puncto, in quo dimidius axis portionis maiorem baſim attingens ſic diuiditur, vt pars prima & ſecunda ſectione terminata ſit ad eam, quæ prima, & poſtrema ſectione terminatur, vt duo rectangula, alterum contentum duobus ſphæræ, vel ſphæroidis axis axi portionis cõgruentis ijs ſegmentis, quæ fiunt à centro minoris baſis portionis: alterum axe portionis, & ſegmento, quod ſphæræ, vel ſphæroidis, & maioris baſis portionis centra iungit, vnà cum duabus tertiis quadrati axis portionis, ad ſphæræ vel ſphæroidis dimidij axis quadratum.

Sit ſphæræ, vel ſphæroidis, cuius centrum E portio A B C D, abſciſſa duobus planis parallelis, neutro per E tranſeunte, nec E intercipientibus: portionis autem axis ſit F S: maior baſis circulus, vel ellipſis, cuius diame-

ter A D: & circa axim E F, ſtet cylindrus, vel portio cylindrica M N abſciſſa iiſdem planis cum portione A B C D ex cylindro, vel portione cylindrica, ſphæræ, vel ſphæroidi B C R circa eius axim G F S R circumſcripta, cuius ſit centrum grauitatis H, ac propterea ſecta F S bifariam in puncto H. reliqui autem dempta portione A B C D ex ſolido M N ſit centrum grauitatis K, quod cadet in F H, & portionis A B C D centrum grauitatis in ipſa H S cadet, quod ſit L. Dico eſſe H K ad K L, vt duo rectangula G F R, F S E, vnà cum duabus tertiis quadrati F S, ad quadratum E G. Quoniam enim



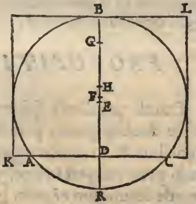
ſimiliter vt ante oſtenderemus eſſe H K ad K L, vt eſt portio A B C D ad ſolidum M N: ſed portio A B C D ad ſolidum M N, eſt vt duo rectaugula G F R, E S F, vnà cum duabus tertiis quadrati F S, ad quadratum E G; vt igitur duo prædicta rectangula, vnà cum duabus tertiis quadrati F S ad quadratum E G, ita erit H K ad K L. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXV.

Omnis maioris portionis ſphæræ, vel ſphæroidis centrum grauitatis eſt in axe, primum bifariam ſecto: deinde ſecundum centrum grauitatis reliqui dempta portione ex cylindro, vel portione

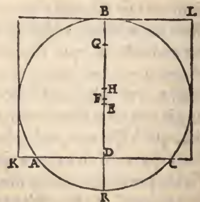
cylin-

cylindrica, abſciſſo, vel abſciſſa vnà cum portione, à cylindro. vel portione cylindrica, ſphæræ, vel ſphæroidi circa eius axim axi portionis cōgruentem circumſcripta; in eo puncto, in quo axis portionis ſic diuiditur, vt pars prima, & ſecunda ſectione terminata ſit ad eam, quæ prima & poſtrema ſectione terminatur, vt ſolidum rectangulum ex axe portionis, & reliquo ſegmento axis ſphæræ, vel ſphæroidis axi portionis congruentis, & eo, quod ſphæræ, vel ſphæroidis, & baſis portionis centra iungit, vnà cum binis tertijs duorum cuborum; & eius, qui à ſphæræ, vel ſphæroidis axis ſit dimidio: & eius, qui ab ea, quæ ſphæræ, vel ſphæroidis, & baſis portionis centra iungit; ad ſolidum rectangulum, quod duobus ſphæræ, vel ſphæroidis prædicti axis dimidijs, & axe portionis continetur.



Sit ſphæræ, vel ſphæroidis, cuius centrum E maior portio A B C, cuius axis B D, baſis circulus, vel ellipſis, cuius diameter A C: & circa axem B D ſtet cylindrus, vel portio cylindrica K L, abſciſſa eodem plano cum portione A B C, ex cylindro, vel portione cylindrica, ſphæræ, vel ſphæroidi A B C R circa eius axim B D R circumſcripta, & ſe-

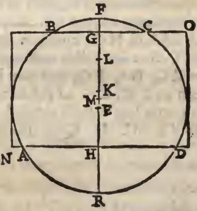
& ſecta B D bifariam in puncto H: deinde ſecundum G in ipſa B H, centrum grauitatis reliqui dempta portione ex ſolido K L, ſit portionis A B C in ipſa D H centrum grauitatis F, per vim xxxvii ſecundi. Dico eſſe H G ad G F, vt ſolidum rectangulum ex B D, D R, D E vnà cum binis tertiis duorum cuborũ ex B E, E D, ad ſolidum rectangulum ex B D, B E, E R. Similiter enim vt ſupra demonſtrato eſſe vt H G ad G F, ita portionem A B C ad ſolidũ K L; quoniam portio A B C ad ſolidum K L eſt vt ſolidum ex B D, D R, D E, vnà cum binis tertiis duorum cuborũ ex B E, & E D, ad ſolidum ex B D, B E, E R; erit vt modo dicta antecedens magnitudo ad dictam conſequentem, ita H G, ad G F. Quod demonſtrandum erat.



PROPOSITIO XXXVI.

Omnis portionis ſphæræ, vel ſphæroidis abſciſſæ duobus planis parallelis centrum intercipientibus, & ab eo non æqualiter diſtantibus, centrum grauitatis eſt in axe, primum bifariam ſecto: deinde ſecundum cẽtrum grauitatis reliqui dempta portione ex cylindro, vel portione cylindrica, abſciſſo, vel abſciſſa vnà cum portione, à cylindro

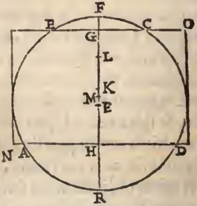
dro,vel portione cylindrica,ſphæræ, vel ſphæroi-
di circa eius axim axi portionis congruentem cir-
cumſcripta; in eopuncto, in quo maius ſegmen-
tum axis portionis eorum, quæ à centro fiunt ſic
diuiditur,vt pars prima & ſecunda ſectione termi
nata ſit ad eam, quæ prima, & poſtrema ſectione
terminatur, vt duo ſolida rectangula; & quod fit
ex duobus ſphæræ,vel ſphæroidis axis axi portio-
nis congruentis ijs ſegmentis, quæ fiunt à centro
maioris baſis portionis, & ea, quæ maioris baſis
& ſphæræ, vel ſphæroidis centra iungit: & quod
ex ſphæræ, vel ſphæroidis eiuſdem axis ſegmentis
à centro minoris baſis factis,& ea,quæ minoris ba
ſis, & ſphæræ, vel ſphæroidis centra iungit, vnà
cum binis tertiis partibus duorum cuborum ex ijs
ſegmentis axis portionis, quæ à centro ſphæræ,
vel ſphæroidis fiunt;ad ſolidum rectãgulum quod
duobus ſphæræ, vel ſphæroidis prædicti axis dimi
dijs, & axe portio-
nis continetur.



Sit ſphæræ, vel ſphæ
roidis, cuius centrum
E,portio A B C D, ab
ſciſſa duobus planis pa
rallelis centrum E in-
tercipientibus, & ab eo
non æqualiter diſtan-
tibus: axis autem por-
tionis ſit G H: maior

baſis

baſis circulus,vel ellipſis,cuius diameter A D. minor autẽ, cuius diameter A B C: & circa axim G H, ſtet cylindrus, vel portio cylindrica N O, abſciſſa ijſdem planis cum portione A B C D, ex cylindro,vel portione cylindrica ſphæræ,vel ſphæroidi B C R cir a axim F G H R circumſcripta,cuius ſit centrum grauitatis K, ſectio ſcilicet bipartiti axis G H: reliqui autem ex ſolido N O dempta portione, ſit centrum grauitatis L, nempe in axis G H ſegmento G K, quod minorem portionis baſim attingit: portionis autem A B C D ſit centrum grauitatis M: quod quidem in reliquo ſegmento K H cadet. Dico eſſe K L ad L M, vt duo ſolida rectangula ex F H, H R, E H, & ex R G, G F, G K, vnà cum binis tertiis duorum cuborum ex E G, E H; ad ſolidum



rectangulum ex G H, E F, E R. Similiter enim vt ſuprà demonſtrato eſſe vt K L ad L M, ita portionem A B C D ad ſolidum N O; quoniam portio A B C D ad ſolidum N O, eſt vt duo ſolida rectangula ex G H, H R, E H, & ex R G, G F, E G, vnà cum binis tertiis duorum cuborum ex E H, E G ad ſolidum ex G H, E F, E R, erit vt totum iam dictum antecedens ad dictum conſequens, ita K L ad L M. Quod demonſtrandum erat.

PRO-

163

PROPOSITIO XXXVII.

Omnis portionis conoidis parabolici centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars quæ ad verticem ſit ei us, quæ ad baſim dupla.

PROPOSITIO XXXVIII.

Omnis fruſti portionis conoidis parabolici centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars minorem baſim attingens ſit ad reliquam, vt duplum maioris baſis vnà cum minori, ad duplum minoris, vnà cum maiori.

Harum proportionum vtriuſque non alia demonſtratio eſt ab ea, quam in ſecundo ſcripſimus de centro grauitatis conoidis parabolici, & eius fruſti: propterea quod omnis portionis conoidis parabolici, ſicut & hyperbolici ſectio baſi parallela ellipſis eſt ſimilis baſi. Ex corollario xv. de conoidibus, & ſphæroidibus Archimedis.

PROPOSITIO XXXIX.

Omnis conoidis hyperbolici, vel portionis hyperbolici conoidis centrum grauitatis, eſt punctum illud, in quo duodecima pars axis ordine quarta ab ea, quæ baſim attingit, ſic diuiditur, vt pars propinquior baſi ſit ad reliquam vt ſeſquial-

K tera

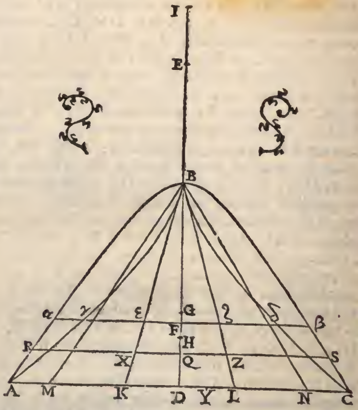
tera tranſuerſi lateris, hyperboles per axem, ad axem conoidis.



Sit conoides hyperbolicum, vel portio conoidis hyperbolici A B C, cuius axis B D, qui in portione non erit ad baſim perpendicularij: baſis autem dicti conoidis, vel portionis ſit circulus, vel ellipſis, cuius diameter A D C: & hyperboles A B C, quæ vel conoides deſcribit, vel eſt ſectio tantummodo per axem, cuius tranſuerſum latus ſit B E, & huius

huius ſeſquialtera B E F: & ſumpta axis B D quarta parte D F, & tertia D G: qua ratione erit F G duodecima pars axis B D quarta ab ea, cuius terminus D; fiat vt I B ad B D, ita F H ad H G. Dico conoidis, vel portionis A B C centrum grauitatis eſſe H. Nam vt eſt E B ad B D ita fiat D K ad K A: & ponatur K D Y ſeſquialtera ipſius D K, & ex A K abſcindatur K M ſubſeſquialtera ipſius A K: & ipſis D K D M, D A, æquales eodem ordine abſcindantur D L, D N, D C: & deſcribantur triangula K B L, M B N: & per puncta A B C vertice communi B, tranſeant duæ ſectiones parabolæ A O B, & B P C, ita vt contingat recta B K parabolam A O B, recta autem B L parabolam B P C; ſit autem A K L C, parabolarum diametris parallela. Deinde ſecto axe B D bifariam, & ſingulis eius partibus rurſus bifariam in quotlibet partes æquales, ſint ex illis duæ partes D Q, Q F: & per puncta Q F planis quibuſdam baſi parallelis ſecentur vnà ſolidum & hyperbole A B C: ſintque hyperboles ſectiones, quæ continent ſectiones triangulorum A B C mixti, & rectilinei K B L, rectæ R T X Z V S: αγιζδβ. ſolidi autem A B C ſectiones erunt circuli, vel ellipſes ſimiles baſi circa diametros R S, αβ. Quoniam igitur eſt vt Υ K ad K D, ita A K ad K M; vtrobique enim eſt proportio ſeſquialtera: erit permutando vt Y K ad A Κ, hoc eſt vt I B ad B D, vel F H, ad H G, ita D Κ ad Κ M, hoc eſt triangulum B D K ad triangulum B K M, hoc eſt ad æquale huic ex demonſtratis triangulum A Κ B mixtum: hoc eſt in duplis ita triangulum B K L ad duo mixta rriangula A K B, B L C ſimul. ſed duorum triangulorum A K B, B L C ſimul eſt centrum grauitatis F, vt in hoc tertio libro demonſtrauimus: trianguli autem B K L, vt in primo, centrum grauitatis G; totius igitur trianguli A B C centrum grauitatis erit H. Rurſus quoniam eſt vt B D ad B Q hoc

eſt vt rectangulum E B D ad rectangulum E B Q, ita D K ad Q X: & vt quadratum B K ad quadratum B X, hoc eſt vt quadratum B D ad quadratum B Q, ita eſt A K ad T X; erunt octo magnitudines quaternæ propor-



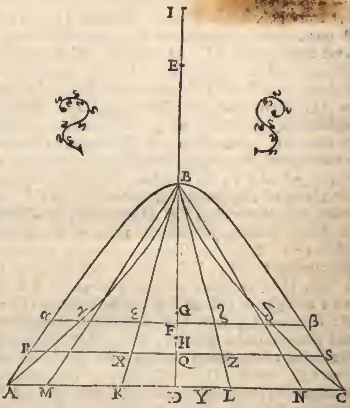
tionales; ſed & earum primæ, & tertiæ ſunt proportionales; nam eſt vt E B ad B D, hoc eſt vt rectangulum E B D prima in primis ad quadratum B D primam in ſecundis, ita D K tertia in primis ad A K tertiam in ſecundis; vt

igitur

igitur compoſita ex primis vtriuſque ordinis ad compoſitam ex ſecundis, ita erit compoſita ex tertiis ad compoſitam ex quartis; videlicet vt rectangulum B D E, quod æquale eſt rectangulo E B D vnà cum quadrato B D, ad rectangulum B Q E, quod æquale eſt rectangulo E B Q vnà cum quadrato B Q, ita erit tota A D ad totam T Q. Sed vt rectangulum B D E ad rectangulum B Q E ita eſt A D quadratum, ad quadratum R Q, hoc eſt ita circulus, vel ellipſis circa A C, ad circulum, vel ſimilem illi ellipſem circa R S; vt igitur A D ad T Q, hoc eſt in earum duplis vt A C ad T V, ita erit circulus, vel ellipſis circa A C ad circulum, vel ellipſem circa R S. Similiter oſtenderemus eſſe vt A C ad $\gamma\delta$, ita circulnm, vel ellipſim circa A C, ad circulum, vel ellipſem, circa $\alpha\beta$: conuertendo igitur, & ex æquali erunt binæ in eadem proportione, vt $\gamma\delta$ ad T V, ita circulus, vel ellipſis circa $\alpha\beta$ ad circulum, vel ellipſim circa R S: & vt T V ad A C, ita circulus, vel ellipſis circa R S ad circulum, vel ellipſim circa A C. Rurſus, quoniam tres rectæ lineæ incipienti à minima $\gamma\iota$, T X, A K ſunt binæ ſumptæ proportionales quadratis ex Bι, B X, B K, hoc eſt quadratis ex Fι, Q X, D K; duplicata erit proportio $\gamma\iota$ ad T X ipſius Fι ad Q X, & T X ad A K duplicata ipſius Q X ad D K: ſed rectæ Fι, Q X, D K, ſeſe æqualiter excedunt, vtpote proportionales ipſis B F, B Q, B D, propter ſimilitudinem triangulorum; minor igitur proportio erit γF ad T Q, quàm T Q ad A D: quare his proportionalium minor erit proportio circuli, vel ellipſis circa $\alpha\beta$ ad circulum, vel ellipſim circa R S, quàm circuli, vel ellipſis circa R S, ad circulum, vel ellipſim, circa A C. Similiter quæcumque ſectiones per prædicta axis, vel diametri B D puncta ſectionum fierent vt dictum eſt ad verticem retrocedenti oſtenderentur quælibet ternæ inter ſe proximæ, binæque ſumptæ vtriuſque ordinis proportio-

nales

nales eſſe, & minor proportio vtrobique minimæ ad mediam quàm mediæ ad maximam; per xxx11 igitur ſecundi, triangulum mixtum, & ſolidum ABC, in huius axe illius autem diametro BD commune habebunt cen-



trum grauitatis. ſed demonſtrauimus H centrum grauitatis trianguli ABC; conoidis igitur vel portionis ABC centrum grauitatis erit idem H. Quod demonſtrandum erat.

Et

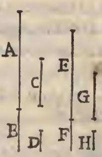
Et hic huius tertij Libri finis eſſet; niſi ſecundo iam impreſſo, alia quædam via magis naturalis me ad conoidis hyperbolici centrum grauitatis reduxiſſet. Ea igitur in ſecundum librum aliàs inſerenda, nunc in ſequenti appendice, ſeptem propoſitionibus expoſita, per ſectionem prædicti conoidis in conoides parabolicum eodem vertice, & circa eundem axim, & reliquam figuram ſolidam, abſque compoſito ex duabus figuris circumſcriptis, quæ ex cylindris componuntur, propoſitum concludat.

APPENDIX.

PROPOSITIO I.

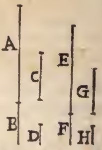
SI ſint octo magnitudines quaternæ totæ, & ablatæ proportionales, fuerint autem, & primarum vtriuſque ordinis ablatæ ad reliquas proportionales; erunt vtriuſque ordinis reliquæ proportionales.

Sint octo magnitudines quaternæ proportionales, ac primi quidem ordinis totæ, vt A B ad C D, ita E F ad G H: ſecundi autem ordinis ablatæ, vt B ad D, ita F ad H: ſit autem vt B ad A ita F ad E. Dico & reliquas eſſe proportionales, videlicet vt A ad C, ita E ad G. Quoniam enim componendo, & conuertendo eſt vt A ad A B, ita E ad E F: ſed vt A B ad



CD

CD, ita eſt EF ad GH; erit ex æquali vt A ad CD, ad E ad GH: & conuertendo vt CD ad A, ita GH ad E: & permutando CD ad GH, ita A ad E. Rurſus quoniam eſt vt A ad B ita E ad F: & vt B ad D, ita F ad H; erit ex æquali, vt A ad D ita E ad H: ſed vt CD ad A, ita erat GH ad E; ex æquali igitur erit vt CD ad D ita GH ad H: & permutando vt CD ad GH, ita D ad H, & reliqua C ad reliquam G: ſed vt CD ad GH ita erat A ad E; vt igitur A ad C ita erit E ad G. Quod demonſtrandum erat.

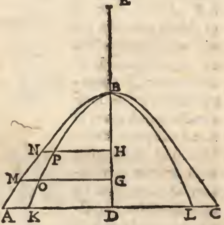


PROPOSITIO II.

Si circa datæ hyperboles communem diametrum parabola deſcripta illius baſim ita diuidat, vt quadratum dimidiæ baſis parabole ad reliquum quadrati dimidiæ baſis hyperboles eam habeat proportionem, quam tranſuerſum latus ad diametrum hyperboles; omnes in hyperbole ad diametrum ordinatim applicatas ita ſecabit, vt exceſſus, quibus quadrata in hyperbole applicatarum ſuperant quadrata in parabola ex ſectione applicatarum, inter ſe ſint vt quadrata diametri partium inter applicatas, & verticem interiectarum.

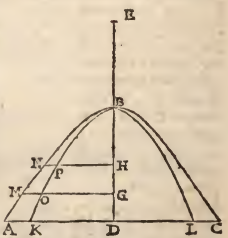
Eſto hyperbole ABC, cuius diameter BD, tranſuerſum

uerſum latus E B. & poſitis in ipſa B D duobus punctis quibuslibet G H, ordinatim applicentur M G, N H: & circa diametrum B D ſit deſcripta parabola K B L taliter vt ipſius dimidiæ baſis D K quadratum ad reliquum quadrati A D, ſit vt E B ad B D, & rectas M H, N G in infinitum productas ſecet parabola K B L in punctis O P. Dico puncta O P intra hyperbolem cadere: & reliquum quadrati M G dempto quadrato G O ad reliquum quadrati N H dempto quadrato P H, eſſe vt quadratum B G ad quadratum B H. Quoniam enim ponitur vt E B ad B D, hoc eſt vt rectangulum E B D ad quadratum B D, ita quadratum D K ad reliquum quadrati A D, erit componendo, & conueniendo, vt rectā gulum B D E ad rectangulum E B D, ita quadratum A D ad quadratum D K: ſed vt rectangulum B G E ad rectāgulum B D E,



ita eſt quadratum M G ad quadratum A D; ex æquali igitur, vt rectangulum B G E ad rectangulum E B D, ita eſt quadratum M G ad quadratum D K: ſed vt rectangulum E B D ad rectangulum E B G, ita eſt quadratum D K ad G O quadratum; ex æquali igitur vt rectangulum B G E ad rectangulum E B G, ita erit quadratum M G ad quadratum G O: ſed rectangulum B G E maius eſt totum parte rectangulo E B G; quadratum igitur M G quadrato G O maius erit, & recta M G maior quàm

G O: ſecat igitur parabola K B L rectam M G in puncto O. Similiter oſtenderemus eandem parabolam ſecare quamcumque aliam in hyperbole A BC ordinatim ad diametrum applicatarum. Quoniam igitur ſunt octo magnitudines quaternæ totæ, & ablatæ proportionales; ac primi quidem ordinis, vt rectangulum B D E ad rectangulum B G E, ita quadratum A D ad quadratum M G: ſecundi autem ordinis, vt rectangulum E B D ad rectangulum E B G ita quadratum D K ad quadratum O G D: ſed vt E B ad B D, hoc eſt vt ablata primæ in primis rectangulum E B D ad reliquum B D quadratum, ita ponitur ablata primæ in ſecundis, quadratum D K ad reliquum exceſſum, quo quadratum A D ſuperat quadratum D K; vt igitur eſt reliqua primæ ad reliquam ſecundæ in primis, ita erit in ſecundis; videlicet vt quadratum B D ad quadratum B G, ita reliquum quadrati A D dempto quadrato D K, ad reliquum quadrati M G dempto quadrato G O. Similiter oſtenderemus reliquum quadrati A D dempto quadrato D K ad reliquum quadrati N H dempto quadrato P H, eſſe vt quadratum B D ad quadratum B H; conuertendo igitur, & ex æquali erit vt quadratum B G ad quadratum B H, ita reliquum quadrati M G dempto quadrato G O, ad reliquum quadrati

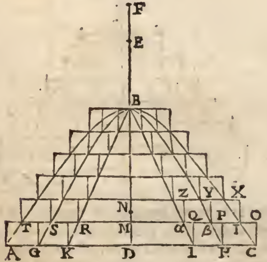


N H

N H dempto quadrato P H. Quod demonſtrandum erat.

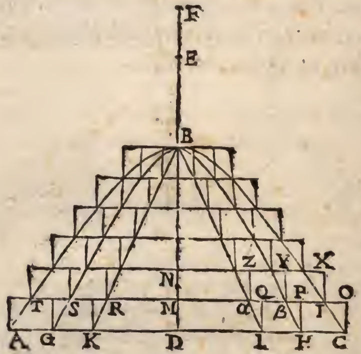
PROPOSITIO III. 168

Omne conoides hyperbolicum diuiditur in conoides parabolicum circa eundem axim, & reliquam figuram quandam, ad quam conoides parabolicum eam habet proportionem, quam ſeſquialtera tranſuerſi lateris hyperboles, quæ conoides deſcribit, ad axem conoidis.



Sit conoides hyperbolicum A B C, cuius axis B D: hyperboles autem, quæ conoides deſcribit tranſuerſum latus E B, cuius ſit ſeſquialtera B E F: & abſciſſa D G, ita vt quadratum ex ipſa ad reliquum quadrati A D ſit vt E B ad B D, vertice B circa diametrum B D deſcripta ſit

parabola G B H, eaq; circumducta conoides G B H. Dico conoides G B H comprehendi à conoide A B C & eſſe ad illius reliquum, vt F B ad B D. Abſciſſa enim D K ita potentia ſit ad D G, vt D B ad B E longitudine, circa axim B D deſcribatur conus K B L: & ſecta B D in multas partes æquales, ductoſque per ea puncta planis quibuſdam baſi parallelis, ſecentur tria dicta ſolida, conus ſcilicet & vtrumque conoides: & ſuper ſectiones circulos deſcribantur cylindri æqualium altitudinum terni circa



communes axes partes æquales, in quas axis B D diuiſus fuit, & inter eadem plana parallela: & omnino triplex figura ex cylindris, quos diximus ſit tribus dictis ſolidis circumſcripta: ſintque circa duos axes infimos D M, M N terni cylindri A O, G P, K Q: & proxime ordine ipſis reſpondentes cylindri T X, S V, R Z, quorum baſes circa diametros T I, S β, R α, communes ſectiones plani per punctum M, cum tribus ſolidorum ſectionibus per axem, triangulo ſcilicet, parabola, & hyperbole in eodem plano, atque ideo tres

dia-

diametri T I, S β, R α, erunt in vna recta linea. Quoniam igitur eſt vt E B ad B D, ita quadratum D G ad reliquū quadrati A D, ſecabit parabola G B H omnes in hyperbole A B C ad diametrum ordinatim applicatas, quare conoides A B C comprehendet conoides G B H: atque ita parabola ſecabit, vt exceſſus quibus quadrata in hyperbole applicatarum ſuperant partes quadrata in parabola applicatarum, inter ſe ſint vt quadrata partium diametri B D inter applicatas & verticem interiectarum, prout vt inter ſe reſpō dent: vt igitur eſt quadratum B D ad quadratum B M, hoc eſt vt quadratum D K ad quadratum R M, ita erit reliquū A D quadrati dempto quadrato D G ad reliquum quadrati T M dempto quadrato S M, & permutando. Sed quia quadratum D G ad reliquum quadrati A D, & ad quadratum D K eandem habet proportionem ex vi conſtructionis, reliquum quadrati A D, dempto quadrato D G æquale eſt quadrato D K; reliquum igitur quadrati T M dempto quadrato S M æquale erit quadrato R M: ſi igitur vtriſque addantur ſingula communia, vnis quadratum D G, alteris quadratum S M, erit & quadratum A D æquale duobus quadratis G D, D K, & quadratum T M duobus quadratis S M, M R æquale. ſed cum cylindri eiuſdem altitudinis inter ſe ſint vt baſes, ſunt vt quadrata, quæ ab eorundem baſium ſemidiametris fiunt; cylindrus igitur A O æqualis eſt duobus cylindris G P, K Q: & cylindrus T X duobus cylindris S Υ, R Z æqualis. Eadem ratio eſt de reliquis deinceps. Tota igitur figura conoidi A B C circumſcripta, vtrique ſimul, conoidi G B H, & cono K B L circumſcriptæ æqualis erit. poſſunt autem eæ figuræ ita eſſe dictis ſolidis circumſcriptæ per ea quæ alibi oſtendimus, vt ſuperent inſcriptas minori ſpacio quantacumque magnitudine propoſita; per tertiam igitur ſecundi, conoides A B C vtrique ſimul, conoidi G B H, & cono K B L æquale erit. dempto igitur cōmuni conoide G B H, reliquum ſolidū A G B H C

æquale

æquale erit cono K B L. Rurſus quia eſt vt E B ad B D, ita quadratum G D ad quadratum D K, hoc eſt circulus circa G H ad circulum circa K L, hoc eſt conus G B H ſi deſcribatur ad conum K B L: ſed vt F B ad B E ita eſt conoides G B H ad conum G B H; ex æquali igitur erit vt F B ad B D, ita conoides G B H ad conum K B L, hoc eſt ad ſolidum A G B H C. Manifeſtum eſt igitur propoſitũ.

COROLLARIVM.

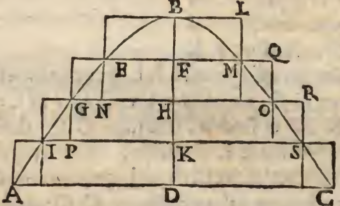
Ex huius Theorematis demonſtratione manifeſtum eſt, iiſdem poſitis cylindros deficientes, ex quibus conſtat exceſſus, quo figura conoidi hyperbolico circumſcripta ſuperat circumſcriptam conoidi parabolico, ita ſe habere, vt quorumlibet trium inter ſe proximorum minor proportio ſit minimi ad medium, quam medij ad maximum: æquales enim ſunt ſinguli ſingulis cylindris, ex quibus conſtat figura cono B K L circumſcripta, qui ſunt inter eadem plana parallela. Quod ſi ita eſt, ſimul illud manifeſtum erit, & ex hoc, & ex ijs, quæ in ſecundo libro demonſtrauimus; prædictum exceſſum ex tot cylindris deficientibus eiuſdem altitudinis, quos diximus componi poſſe, vt ipſius centrum grauitatis in axe B D diſtet à centro grauitatis coni K B L, hoc eſt à puncto in quo axis B D ſic diuiditur, vt pars, quæ ad verticem ſit reliquæ tripla, ea diſtantia, quæ minor ſit quantacumque longitudine propoſita.

PRO-

PROPOSITIO IIII.

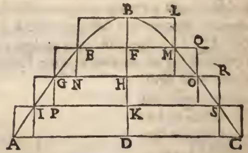
Si conoidi parabolico figura circumſcribatur, & altera inſcribatur ex cylindris æqualium altitudinum, binis circa communes axes ſegmenta axis conoidis, & inter eadem plana parallela, minimo circumſcriptorum ad nullum relato; omnia reſidua cylindrorum figuræ circumſcriptæ demptis figuræ inſcriptæ cylindris, & inter ſe, & minimo cylindro æqualia erunt;

Sit conoidi parabolico A B C, cuius axis B D circumſcripta figura ex quotcumque cylindris æqualium altitudinum, quorum tres deinceps ſint E L minimus ſupremus, & G Q, I R, quorum baſes eodem ordine circuli, quorum ſemidiametri ad parabolæ, quæ figuram deſcribit diametrum B D ordinatim applicatæ ſint E F, G H, I K: & in duplos creſcentibus cylindris circa priorũ axium duplos axes B H, I K, H D, & ſic deinceps quotcumque plures eſsent; ſit conoidi A B C inſcripta figura ex cylindris æqualium altitudinum inter ſe, & circumſcriptis. Bini itaque circa communes axes inter eadem plana parallela interijcientur, minimo E L ad nullum



relato

relato: huic autem proximus, & æqualis cylindrorum inſcriptorum ſit N M baſim ipſi communem habens circulum circa E F M: & conſequenti circumſcriptorum G Q ſit. inſcriptorum æqualis P O baſim habens ipſi communem circulum circa G H O: ſint autem circulorum qui ſunt baſes cylindrorum diametri in parabola per axim: quæ quoniam ſunt communes ſectiones cum parabola per axim planorum baſi conoidis, & inter ſe parallelorum, erunt etiam ipſæ inter ſe, & parabolæ baſi A C parallelæ, earumque dimidiæ vt E F, G H ad diametrum B D ordinatim applicatæ. Quoniam igitur in parabola A B C eſt vt H B ad B F ita quadratum G H ad quadratum E F, duplum erit quadratum G H quadrati EF: quare & circulus circa G O circuli circa E M atque adeo cylindrus G Q cylindri E L duplus, propter ęqualitatem altitudinum: ſed & cylindrus N L



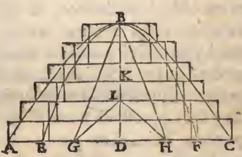
duplus eſt cylindri E L per conſtructionem; cylindrus igitur G Q æqualis eſt cylindro N L: & ablato communi N M cylindro, reliquus G Q deficiens cylindro N M cylindro E L æqualis. Rurſus quia eſt vt K B ad B H, ita quadratum I K ad quadratum G H, hoc eſt ita I R cylindrus ad cylindrum G Q: ſed vt H B ad B F ita erat cylindrus G Q ad cylindrum E L; tres igitur cylindri I R, G Q, E L, tribus lineis B K, B H, B F, eodem ordine proportionales erunt: ſed tres eædem lineæ ſeſe æqualiter excedunt; tres igitur dicti cylindri ſeſe æqualiter

liter excedent,hoc eſt reliquum cylindri I R dempto cylindro P O æquale erit reliquo cylindri G Q dempto cylindro N M, & reliquum cylindri G Q dempto cylindro N M æquale cylindro E L. Similiter ad reliquos cylindros quotcumque plures eſſent deſcendentes oſtenderemus,omnes exceſſus, quibus cylindri circumſcripti inſcriptos ſuperant ſibi quique reſpondentes inter ſe & cylindro E L æquales eſſe. Manifeſtum eſt igitur propoſitum.

PROPOSITIO V.

Dato conoide hyperbolico, & ipſius conoide parabolico circa eundem axim, quod ad reliquum hyperbolici conoidis eam proportionem habeat, quam ſeſquialtera tranſuerſi lateris hyperboles,quæ conoides deſcribit, ad axim conoidis; fieri poteſt vt conoidi parabolico figuræ quædam inſcribatur, & altera circumſcribantur vt ſupra factum eſt,& hyperbolico alio circumſcribatur omnes ex cylindris æqualium altitudinum multitudine æqualibus exiſtentibus ijs, ex quibus conſtant figuræ conoidibus circumſcriptæ, ita vt exceſſus, quo figura conoidi parabolico circumſcripta inſcriptam ſuperat, quem breuitatis cauſa voco exceſſum primum, ad exceſſum, quo figura conoidi hyperbolico circumſcripta ſuperat circumſcriptam parabolico, quem voco exceſſum ſecundum, minorem habeat proportionem quacumque propoſita.

Sit conoides hyperbolicum A B C, & pars eius parabolicum E B F circa eundem axim B D: & conoides E B F ad reliquum conoidis A B C eam habeat proportionem, quam ſeſquialtera tranſuerſi lateris hyperboles per axim A B C ad axim B D. Dico fieri poſſe quod proponitur. Habeat enim D L ad L B quamcumque proportionem:& conoides A B C reliquo ſolido A E B F C dempto conoide E B F. ſit conus circa axim B D æqualis G B H: & deſcribatur conus G L H: & ſecta B D bifariam in puncto K, & rurſus B K, K D in multitudine, & longitudine æquales inſcribatur conoidi E B F, & altera cirumſcribatur, vt in antecedenti factum eſt, figura ex cylindris æqualium altitudinum, ita vt exceſſus, quo circumſcripta ſuperat inſcriptam ſit minor cono G L H: & cylindris creſcentibus in latitudinem abſoluatur figura conoidi A B C circumſcripta ex cylindris altitudine, & multitudine æqualibus ijs, qui ſunt circa conoides E B F. Quoniam igitur primus exceſſus eſt minor cono G L H, multo minor erit pars eius communis ſolido A E B F G, quàm conus G L H: ſed ſolidum A E B F C æquale eſt cono G B H; reliquum igitur ſolidi A E B F C dicto communi ablato, maius erit coni G B H reliquo B G L H; minor igitur proportio eſt



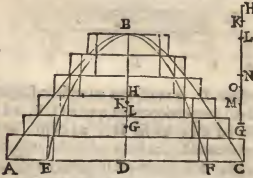
primi

primi exceſſus minoris cono G L H, ad dictum reliquum ſolidi A E B F C, quàm coni G L H ad reliquum coni G B H: ſed ſecundus exceſſus maior eſt prædicto reliquo ſolidi A E B F C, etenim illud comprehendit; multo igitur minor proportio erit primi exceſſus ad ſecundum, quàm coni G L H ad reliquum B G L H, hoc eſt minor proportio quàm D L ad L B: ponitur autem proportio D L ad L B qualiſcumque. Fieri igitur poteſt, quod proponitur.

172

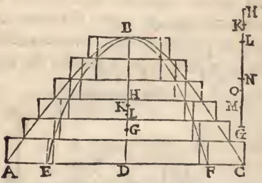
PROPOSITIO VI.

Omnis reſidui conoidis hyperbolici dempto conoide parabolico, vt ſupra diximus, centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo axis ſic diuiditur, vt pars propinquior vertici ſit tripla reliquæ.



Sit conoides hyperbolicum A B C, cuius axis B D, & ablatum conoides parabolicum E B F circa eundem axim B D, ita ſit ad reliquum ſolidum A E B F C, vt ſeſquialtera tranſuerſi lateris hyperboles, quæ conoides deſcribit ad axem B D: & ponatur B G ipſius G D tripla. Dico reliqui

liqui ſolidi A E B F C centrum grauitatis eſse G. Secta enim B D bifariam in puncto H, & poſita G K ipſius G H minori quantacumque longitudine propoſita, ſumptoque in G K quolibet puncto L; intelligantur id enim(fieri poſ ſe manifeſtum eſt ex ſupra demonſtratis)tres figuræ vna inſcripta conoidi E B F, & duæ circumſcriptæ altera alteri conoidum, vt ſupra factum eſt, compoſitæ ex cylindris æqualium altitudinum ita multiplicatis, vt vtrumque illud accidat;& vt ſecundi exceſſus centrum grauitatis quod ſit M (omnium autem trium dictorum exceſſuum in axe B D erunt centra grauitatis) ſit puncto G propinquius



quàm punctum L: & vt primus exceſſus ad ſecundum minorem habeat proportionem ea,quæ eſt L K, ad K H. Deinde vt H K ad K L, ita ſit H N ad N M, & vt primus exceſſus ad ſecundum,ita M O ad O H. Quoniam igitur cylindri omnes deficientes, & ſummus integer, ex quibus primus exceſſus conſtat, inter ſe ſunt æquales, habentque in axe B D centra grauitatis æqualibus interuallis à bipartiti axis B D ſectione H & inter ſe diſtantia; totius primi exceſſus centrum grauitatis erit H: ſecundi autem exceſſus centrum grauitatis ponitur M; cum igitur ſit vt primus exceſſus ad ſecundum, ita ex contraria parte M O

ad

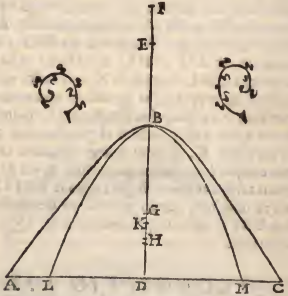
ad O H, erit tertij exceſſus ex duobus prioribus compoſiti centrum grauitatis O. Quoniam igitur minor proportio eſt primi exceſſus ad ſecundum, hoc eſt M O ad O H, quàm L K ad K H; erit conuertendo maior proportio H O ad O M, quàm H K ad K L: ſed vt H K ad K L, ita ponitur H N ad N M; maior igitur proportio eſt H O ad O M, quàm H N ad N M; eiuſdem igitur lineæ H M minor erit M O, quàm M N, & punctum O propinquius puncto G quàm punctum N. Rurſus quia vt H K ad K L, ita eſt H N ad N M; erit componendo & per conuerſionem rationis, vt L H ad H K ita M H ad H N: & permutando, vt H M ad H L, ita H N ad H K: ſed H M eſt maior quàm H L; ergo & H N erit maior quàm H K, & punctum N propinquius puncto G quàm punctum K: ſed punctum O propinquius erat puncto G quàm punctum N; multo igitur erit punctum O propinquius puncto G quàm punctum K, ponitur autem diſtantia G K minor quantacumque longitudine propoſita: & eſt O centrum grauitatis tertij exceſſus reliquo ſolido A E B F C circumſcripti; ex ijs igitur, quæ in primo libro demonſtrauimus, ſolidi A E B F C centrum grauitatis erit G. Quod demonſtrandum erat.

PROPOSITIO VII.

Omnis conoidis hyperbolici centrum grauitatis eſt punctum illud, in quo duodecima pars axis quarta ab ea, quæ baſim attingit ſic diuiditur, vt pars propinquior baſi ſit ad reliquam, vt ſeſquialtera tranſuerſi lateris hyperboles, quæ conoides deſcribit, ad axem conoidis.

Sit conoides hyperbolicum A B C, cuius axis B D: tranſ-

tranſuerſum latus hyperboles, quæ conoides deſcribit ſit B E, huius autem ſeſquialtera B E F: & ſumptà axis B D tertia parte D G, & quarta D H, qua ratione erit G H axis B D pars duodecima, ordine quarta ab ea, cuius termi nus D; eſto vt F B ad B D, ita H K ad K G. Dico conoidis A B C centrum grauitatis eſſe K. Diuidatur enim co-



noides A B C in parabolicum conoides L B M, & reliquum ſolidum A L B M C, ita vt conoides L B M ad ſolidum A L B M C ſit vt F B ad B D, hoc eſt vt H K G K. Quoniam igitur G eſt centrum grauitatis conoidis L B M, & H ſolidi A L B M C; totius conoidis A B C centrum graui tatis erit K. Quod demonſtrandum erat.

TERTII LIBRI FINIS.